VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV
megyei szakasz, 2026. február 7.

IX. osztály

1. feladat. Az a, b, c egymástól páronként különböző valós számokra teljesülnek az

$$a^3 + ax = b^3 + bx = c^3 + cx$$

összefüggések, ahol x egy adott valós szám.

a) Mutasd ki, hogy $a + b + c = 0$.

b) Igazold, hogy
$$|a + y| + |1 + y - b| \geq |c + 1|, \forall y \in \mathbb{R}.$$

2. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszögben $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ és D a BC oldal felezőpontja. Ha E a D kezdőpontú DB félegyenes azon pontja, amelyre $AB = 2DE$, akkor bizonyítsd be, hogy:

a) E a B és D pontok között található;

b) AE az ABC háromszög magassága!

3. feladat. a) Igazold, hogy:

$$\sqrt{1+a} < 1 + \frac{a}{2}, \quad \forall a > 0.$$

b) Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladványt, amelyben $r > 0, a_1 > 0$ és $4a_1a_2 > 1$. Képezzük az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{r}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}}$$

összeget, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

Mutasd ki, hogy $[S_n] = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ahol $[x]$ az x szám egész részét jelöli.

4. feladat. a) Egy város általános és középiskolai tagozatain (5. osztálytól 12. osztályig) összesen 2026 diák jár. Ha minden évfolyamon legfeljebb 5 különböző iskolából vannak a tanulók, akkor igazold, hogy van egy iskola a városban, ahonnan legalább 26 fiú vagy legalább 26 lány származik ugyanarról az évfolyamról!

b) Igazold, hogy 2025 tetszőleges egész szám közül kiválasztható 324 darab szám, amelyeknek összege osztható 36-tal!

Megjegyzések: Az első két feladat 30-30 pontot, az utolsó kettő 20-20 pontot ér, amelyből hivatalból összesen jár 10 pont. Munkaidő: 3 óra.