MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CENTRUL NAȚIONAL PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV
megyei szakasz, 2026. február 7.

X. osztály

1. feladat. a) Az a és b pozitív valós számok teljesítik az

$$a^2 + b^2 = 2024ab$$

összefüggést. Igazold, hogy

$$\lg \frac{a+b}{\sqrt{2026}} = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$

b) Igazold, hogy ha $x, y, z, w > 1$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\log_w \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 - \log_{\frac{1}{w}} \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3 \geq 2 \cdot \log_w \left(xyz \cdot \sqrt{xyz}\right).$$

2. feladat. Adott az $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{k=-n^3}^{n^3} \left[\sqrt[3]{k}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

függvény, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$f(n) = n - n^3.$$

b) Tanulmányozd az f függvény injektivitását és szürjektivitását!

3. feladat. Az a, b és c komplex számokra fennállnak a

$$|a| = |b| = |c| = 1 \qquad \text{és} \qquad |a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 12$$

összefüggések. Igazold, hogy az a, b és c affixumú pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcspontjai!

4. feladat. Egy játékban 6 játékos vesz részt. Bármely két játékos vagy szövetségese vagy riválisa egymásnak. Bizonyítsd be, hogy biztosan kiválasztható a hat játékos közül három olyan, akik páronként vagy mind szövetségesek egymással, vagy mind riválisok egymással!

Megjegyzések: Az első két feladat 30-30 pontot, az utolsó kettő 20-20 pontot ér, amelyből hivatalból összesen jár 10 pont. Munkaidő: 3 óra.