VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV

megyei szakasz, 2026. február 7.

XI. osztály

1. feladat. Adott az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = U$ mátrixegyenlet, ahol $X, U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Igazold, hogy az $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix esetén nincs megoldása az egyenletnek!

b) Add meg az összes olyan $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre az egyenletnek végtelen sok megoldása van!

2. feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot az

$$a_1 = \sqrt{5} \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3[a_n] + 6}{5}, \quad \forall n \geq 1,$$

rekurzióval értelmezzük, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Számítsd ki a sorozat általános tagjának $[a_n]$ egész részét!

b) Igazold, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ határérték és határozd meg az értékét!

c) Igazold, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^2}$ határérték és számítsd ki az értékét!

3. feladat. Adott egy $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$x_n > 1 \quad \text{és} \quad x_{n+1}^3 < 3x_n - 2, \quad \forall n \geq 1.$$

Igazold, hogy a sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

4. feladat. Egy $n \times n$-es négyzetrácsos táblán véletlenszerűen kijelölünk két különböző mezőt (vagyis 1×1-es négyzetet). Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kijelölt mezők középpontjait összekötő szakasz felezőpontja is egy mező középpontja legyen!

Megjegyzések: Az első két feladat 30-30 pontot, az utolsó kettő 20-20 pontot ér, amelyből hivatalból összesen jár 10 pont. Munkaidő: 3 óra.