CENTRUL NAȚIONAL PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV
megyei szakasz, 2026. február 7.

V. osztály

1. feladat (30 pont). Egy űrhajó vezérkarát a kapitány, a tisztek és az altisztek alkotják. Valamennyiük ruháját csillagok díszítik, a kapitány ruháján 8, a tisztekén 5, az alitsztekén pedig 3 csillag van. Az űrhajó vezérlő szobájában tanácskozást tartanak, amelyen a vezérkarból tízen vesznek részt és ruhájukon összesen 44 csillag található. Közöttük van-e a kapitány? Hány tiszt és altiszt vett részt a tanácskozáson?
Biró Gabriella, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**
Tegyük fel, hogy köztük van a kapitány, ez azt jelenti hogy a maradék $10-1=9$ ember ruháján összesen $44-8=36$ csillag van. **(6 pont)**
Alkalmazzuk a hamis feltevés módszerét. Tegyük fel, hogy mind a 9 ember altiszt, azaz mindenik ruháján 3 csillag van, ez $9\cdot 3=27$. Marad még $36-27=9$ csillag. **(3 pont)**
De a 9 nem osztható az $5-3=2$ különbséggel. Tehát nem lehet közöttük a kapitány. **(3 pont)**
Így viszont a vezérlő szobában levő 10 ember mindegyike csak tiszt (5 csillaggal) vagy altiszt lehet (3 csillaggal) és összesen 44 csillag van rajtuk. **(3 pont)**
Alkalmazzuk a hamis feltevés módszerét. Tegyük fel, hogy mind a 10 ember altiszt, azaz mindenik ruháján 3 csillag van, ez $10\cdot 3=30$. Marad még $44-30=14$ csillag. **(3 pont)**
A különbség abból adódik, hogy vannak köztük tisztek is, nekik $5-3=2$ csillaggal több van a ruhájukon. **(3 pont)**
Tehát $14:2=7$ tiszt és 3 altiszt vett részt a tanácskozáson. **(6 pont)**
■

2. feladat (30 pont). Az ábrán látható bűvös négyzetbe a természetes számokat helyezzük el 1-től 16-ig, mindegyiket pontosan egyszer úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átló mentén a számok összege ugyanannyi legyen. Írd be a hiányzó számokat! Hogyan gondolkoztál?

	8		1
2		7	
3		6	
	5	9	4

Matlap 9/2025, A:5170

Első megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

Megjegyzés. Helyes kitöltés esetén, indoklás nélkül 15 pont kapható.

A táblázatban a természetes számok szerepelnek 1-től 16-ig, mindegyik pontosan egyszer, így a táblázatban szereplő számok összege $1+2+\cdots+16=\frac{16\cdot 17}{2}=136$. **(6 pont)**
Mivel minden sorban ugyanannyi a számok összege, így egy sorban az összeg $136:4=34$. **(3 pont)**
Tehát a feltételek alapján minden sorban, oszlopban, illetve a két átló mentén a számok összege 34 kell legyen. **(3 pont)**
Ekkor a harmadik oszlop legfelső eleme $34-(7+6+9)=34-22=12$. A legalsó sor első eleme pedig $34-(5+9+4)=34-18=16$. **(6 pont)**
Ezután az előző lépésekhez hasonlóan kitöltjük a négyzetet, figyelve arra, hogy az összeg mindenhol 34 legyen. Például a harmadik sor második eleme 10 kell legyen az átló miatt. Ekkor a harmadik sor utolsó eleme 15, a sor miatt. **(3 pont)**
A második sor utolsó eleme 14 kell legyen az utolsó oszlop miatt. Emiatt pedig a második sor második eleme 11. **(3 pont)**
Illetve ekkor az első sor első eleme 13, az első oszlop és az átló miatt. Az alábbi ábrán látható a helyes kitöltés: **(3 pont)**

13	8	12	1
2	11	7	14
3	10	6	15
16	5	9	4

■

Második megoldás. Hivatalból **(3 pont)**
A harmadik oszlopban a számok összege 22, a legalsó sorban pedig 18, tehát a két összeg között a különbség 4. Mivel minden sorban és oszlopban az összeg megegyezik, ezért a bal alsó sarokba beírt szám 4-gyel nagyobb kell legyen, mint az első sor harmadik eleme. **(3 pont)**
Tehát a két helyre kerülő számpárok lehetnek $(10,14)$, $(11,15)$ vagy $(12,16)$. **(3 pont)**
Hogyha a bal alsó sarokba 14-et írunk, a felső sor harmadik helyére pedig 10-et, akkor az összeg 32. Ekkor a bal felső sarokba a 13 kell kerüljön, de akkor az átló miatt a második sor második eleme 9 kellene legyen, de a 9 már szerepel a táblázatban, így ez a kitöltés nem befejezhető. **(6 pont)**
Hogyha a bal alsó sarokba 15 kerül, a felső sor harmadik helyére pedig 11, akkor az összeg 33. Ekkor a bal felső sarokba 13 kell kerüljön, így az átló miatt a második sor második eleme 10 kell legyen. Ekkor viszont a második oszlop összege miatt a harmadik sor második eleme szintén 10 kellene legyen, így a kitöltés nem befejezhető. **(6 pont)**
Így tehát a kitöltés csak a $(12,16)$ esetben fejezhető be. A kitöltés befejezését lásd az előző megoldásban. **(9 pont)**
■

3. feladat (20 pont). Koppány és Vajk játékot játszottak az $1,2,3,\ldots,10$ természetes számokkal. A fiúk minden körben választottak maguknak néhány számot, majd tettek egy-egy kijelentést. Döntsd el, ki mondott igazat!

a) Első körben mindketten választottak. Koppány az összes párosat, Vajk pedig az összes páratlant választotta. Mindketten négyzetre emelték a számokat, majd rendre elosztották mindegyiket 10-zel. Vajk azt állítja, hogy többféle maradékot kapott, mint Koppány. Igazat mondott?

b) Második körben Koppány kiválasztotta a 2, 3, 5, 7 és 9 számokat, majd mindeniket a 2026-ik hatványra emelte, az eredményeket pedig összeadta. Azt állította ezután, hogy négyzetszámot kapott. Igazat mondott?

c) Harmadik körben Vajk választotta a 2-es számot. Rendre felemelte a $96, 97, \ldots, 2025, 2026$ hatványra, majd a kapott eredményeket összeadta. Azt állította ezután, hogy négyzetszámot kapott. Igazat mondott?

Gáspár Edit, Zilah
Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) A számok tízzel való osztási maradéka tulajdonképpen a számok utolsó számjegye. Jelölje egy n szám utolsó számjegyét az $u(n)$. Az páros számok négyzeteinek utolsó számjegyei: $u(2^2) = 4$, $u(4^2) = 6$, $u(6^2) = 6$, $u(8^2) = 4$, $u(10^2) = 0$. **(2 pont)**
A páratlan számok négyzeteinek utolsó számjegye: $u(1^2) = 1$, $u(3^2) = 9$, $u(5^2) = 5$, $u(7^2) = 9$, $u(9^2) = 1$. **(2 pont)**
Mindkét fiú csak $3-3$ különböző maradékot (utolsó számjegyet) kapott, tehát Vajk hazudott.

b) Vizsgáljuk a 2026. hatványok utolsó számjegyeit. A 2 hatványainak utolsó számjegyei rendre 2, 4, 8, 6, majd ezek ismétlődnek négyessével. Minden 4-gyel osztható hatvány utolsó számjegye 6, így $u(2^{2024}) = 6$, ahonnan $u(2^{2026}) = 4$. A 3 hatványainak utolsó számjegyei rendre 3, 9, 7, 1, majd ezek ismétlődnek négyessével. Minden 4-gyel osztható hatvány utolsó számjegye 1, így $u(3^{2024}) = 1$, ahonnan $u(2^{2026}) = 9$. Az 5 mindenik hatványának utolsó számjegye 5, így $u(5^{2026}) = 5$. **(2 pont)**
A 7 hatványainak utolsó számjegyei rendre 7, 9, 3, 1, majd ezek ismétlődnek négyessével. Minden 4-gyel osztható hatvány utolsó számjegye 1, így $u(7^{2024}) = 1$, ahonnan $u(7^{2026}) = 9$. A 9 hatványainak utolsó számjegyei rendre 9, 1 majd ezek ismétlődnek kettessével. Minden páros hatvány utolsó számjegye 1, így $u(9^{2026}) = 1$. **(2 pont)**

$$\begin{aligned} u(2^{2026} + 3^{2026} + 5^{2026} + 7^{2026} + 9^{2026}) &= u(u(2^{2026}) + u(3^{2026}) + u(5^{2026}) + u(7^{2026}) + u(9^{2026})) \\ &= u(4 + 9 + 5 + 9 + 1) \\ &= u(28) = 8. \end{aligned}$$ **(2 pont)**

De mivel négyzetszám nem végződhet 8-ra, így Koppány hazudott. **(2 pont)**

c) A Vajk által számolt összeg legyen $A = 2^{96} + 2^{97} + \cdots + 2^{2026}$. Vizsgáljuk az utolsó számjegyét. Ha az A összeget beszorozzunk kettővel, akkor

$$2 \cdot A = 2 \cdot (2^{96} + 2^{97} + \cdots + 2^{2026}) = 2^{97} + 2^{98} + \cdots + 2^{2027},$$

illetve vonjuk ki belőle az eredeti A összeget:

$$\begin{aligned} 2 \cdot A - A &= (2^{97} + 2^{98} + \cdots + 2^{2027}) - (2^{96} + 2^{97} + \cdots + 2^{2026}) \\ &= 2^{2027} - 2^{96}. \end{aligned}$$ **(4 pont)**

A 2 hatványainak utolsó számjegyei rendre 2, 4, 8, 6, majd ezek ismétlődnek négyessével. Minden 4-gyel osztható hatvány utolsó számjegye 6, így $u(2^{96}) = 6$, illetve $u(2^{2027}) = 8$. Ekkor az $u(A) = u(2^{2027} - 2^{96}) = u(2^{2027}) - u(2^{96}) = 8 - 6 = 2$. Mivel négyzetszám utolsó számjegye nem lehet 2, Vajk hazudott. **(2 pont)**

■

4. feladat (20 pont). Az A, B, C nem feltétlenül különböző, nemnulla természetes számokat jelölnek, amelyekre $A \leq B \leq C$.

a) Írd fel az összes lehetséges (A, B, C) számhármast, amelyre $A^2 + B^2 + C^2 = 99$.

b) Írj fel három olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^2 + B^2 + C^2 = 99^{2025}$.

c) Írj fel egy olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^3 + B^3 + C^3 = 99$.

d) Írj fel egy olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^3 + B^3 + C^3 = 99^{2026}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) A 99 háromféleképpen írható fel három négyzetszám összegeként:

$$99 = 9 + 9 + 81 = 3^2 + 3^2 + 9^2\,, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$99 = 1 + 49 + 49 = 1^2 + 7^2 + 7^2\,, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$99 = 25 + 25 + 49 = 5^2 + 5^2 + 7^2\,. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Így a számhármasok a következők lehetnek: $(A, B, C) \in \{(3, 3, 9), (1, 7, 7), (5, 5, 7)\}$.

b) Induljunk ki az előző alpont megoldásaiból. Az összeg a következőképp alakítható $A + B + C = 99^{2025} = 99 \cdot 99^{2024} = 99 \cdot \left(99^{1012}\right)^2$. Így minden előző alpontbeli megoldásból kialakítható egy-egy megoldás:

$$99 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 = (3^2 + 3^2 + 9^2) \cdot \left(99^{1012}\right)^2 = 3^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 + 3^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 + 9^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2$$
$$\text{tehát} \quad 99^{2025} = \left(3 \cdot 99^{1012}\right)^2 + \left(3 \cdot 99^{1012}\right)^2 + \left(9 \cdot 99^{1012}\right)^2 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$99 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 = (1^2 + 7^2 + 7^2) \cdot \left(99^{1012}\right)^2 = 1^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 + 7^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 + 7^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2$$
$$\text{tehát} \quad 99^{2025} = \left(1 \cdot 99^{1012}\right)^2 + \left(7 \cdot 99^{1012}\right)^2 + \left(7 \cdot 99^{1012}\right)^2 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$99 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 = (5^2 + 5^2 + 7^2) \cdot \left(99^{1012}\right)^2 = 5^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 + 5^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2 + 7^2 \cdot \left(99^{1012}\right)^2$$
$$\text{tehát} \quad 99^{2025} = \left(5 \cdot 99^{1012}\right)^2 + \left(5 \cdot 99^{1012}\right)^2 + \left(7 \cdot 99^{1012}\right)^2\,. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Így a számhármasok a következők lehetnek: $(A, B, C) \in \{(3 \cdot 99^{1012}, 3 \cdot 99^{1012}, 9 \cdot 99^{1012}), (1 \cdot 99^{1012}, 7 \cdot 99^{1012}, 7 \cdot 99^{1012}), (5 \cdot 99^{1012}, 5 \cdot 99^{1012}, 7 \cdot 99^{1012})\}$.

c) A 99 felírható, mint $99 = 8 + 27 + 64 = 2^3 + 3^3 + 4^3$, tehát egy darab számhármas az $(A, B, C) = (2, 3, 4)$. **(2 pont)**

d) Induljunk ki az előző alpont megoldásából. Ekkor az adott összeg a következőképp alakítható $A + B + C = 99^{2026} = 99 \cdot 99^{2025} = 99 \cdot (99^{675})^3$. Így az előző alpontbeli megoldásból kialakítható egy megoldás

$$99 \cdot \left(99^{675}\right)^3 = (2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot \left(99^{675}\right)^3 = 2^3 \cdot \left(99^{675}\right)^3 + 3^3 \cdot \left(99^{675}\right)^3 + 4^3 \cdot \left(99^{675}\right)^3$$

$$\text{tehát} \quad 99^{2026} = \left(2 \cdot 99^{675}\right)^3 + \left(3 \cdot 99^{675}\right)^3 + \left(4 \cdot 99^{675}\right)^3 .$$ **(4 pont)**

Tehát egy darab ilyen számhármas az $(A, B, C) = \{(2 \cdot 99^{675}, 3 \cdot 99^{675}, 9 \cdot 99^{675})$.

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

Pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.