CENTRUL NAȚIONAL PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV

megyei szakasz, 2026. február 7.

VI. osztály

1. feladat (30 pont). A társasjátékstand előtt egyezkedik Csongor és Dávid. Ugyanazon társasjáték megvásárlását tervezik, de külön-külön egyiküknek sincs elegendő pénze: Csongor pénzéből hiányzik a játék árának $\frac{1}{3}$−a, míg Dávidé az ár $16,(6)\%$−val kevesebb. Ezért úgy döntenek, hogy közösen vásárolják meg a játékot. A vásárlást követően összesen 90 lejük maradt meg.

a) Határozd meg a társasjáték árát, valamint azt, hogy mennyi pénze volt Csongornak és Dávidnak a vásárlás előtt!

b) A megmaradt összeget úgy osztják fel egymás között, hogy a vásárlás előtti és az osztozkodás utáni pénzük aránya megegyezzen. Mennyi pénzt kap Csongor, illetve Dávid a megmaradt pénzből?

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Legyen a társasjáték ára x lej. **(3 pont)**
Csongornak kezdetben a pénze $\frac{2}{3} \cdot x$ lej, Dávid pénze pedig $\frac{5}{6} \cdot x$ lej. **(6 pont)**
Így $\frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{6} \cdot x = x + 90$. **(3 pont)**
Ebből $4x + 5x = 6x + 540$, vagyis $x = 180$ lej a társasjáték ára. **(3 pont)**
A vásárlás előtt Csongornak $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot 180 = 120$ leje volt, míg Dávidnak $\frac{5}{6} \cdot x = \frac{5}{6} \cdot 180 = 150$ lej állt rendelkezésére. **(3 pont)**

b) A vásárlás előtti pénzösszegek aránya $\frac{120}{150}$. Ha Csongor y pénzösszeget fog visszakapni, akkor Dávid $90 - y$ összeget.
Tehát felírhatjuk, hogy $\frac{120}{150} = \frac{y}{90-y}$. Az aránypárok tulajdonságából következik, hogy **(3 pont)**
$120 \cdot (90 - y) = 150 \cdot y$, ahonnan $9y = 360$, vagyis $y = 40$ lej. **(3 pont)**
Így Csongor a megmaradt pénzből 40 lejt kap vissza, míg Dávid 50 lejt. **(3 pont)**

■

2. feladat (30 pont). Jancsinak három doboza van, az első dobozban pontosan három sárga golyó, a másodikban három zöld golyó és a harmadikban három kék golyó van. Az első lépésben: az első dobozból kivesz 3 golyót és szétosztja a másik kettő között úgy, hogy mindegyikbe legalább egy golyót tesz. A következő lépésben kivesz 3 golyót a második dobozból és hasonlóan szétosztja. Ugyanezt a lépést teszi meg a harmadik doboz esetében is, majd visszatér az első dobozhoz. Ezeket a lépéseket addig folytatja, amíg eléri, hogy az első dobozban legyenek a kék golyók, másodikban a sárgák, és harmadikban a zöldek.
Jancsinak sikerült 8 lépésből elérni a célját. Találj ennél kevesebb lépésből álló megoldást!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

Mivel egy lépésben 3 golyót kell kivegyünk egy dobozból, úgy kell rendezzük a golyókat, hogy mindig legyen a következő dobozban legalább három.
Első lépésben vigyünk két sárgát a második dobozba és egyet a harmadikba. A második lépésben a másodikból vigyünk két zöldet a harmadikba és egyet az elsőbe. A harmadik lépésben a harmadik dobozból tegyünk két kéket az elsőbe, és a harmadik kéket a másodikba. Az alábbi táblázatban követhetők ezek a lépések, a gólýokat megszámoztuk a jobb követhetőség érdekében.

0. lépés				1. lépés				2. lépés				3. lépés		
										z_2				
					s_2					z_3				
					s_3	s_1				s_1				
s_1	z_1	k_1			z_1	k_1				k_1		z_1	k_1	s_1
s_2	z_2	k_2			z_2	k_2			s_2	k_2		k_2	s_2	z_2
s_3	z_3	k_3			z_3	k_3		z_1	s_3	k_3		k_3	s_3	z_3

Ezzel elértük, hogy minden színből kettő a helyére kerüljön, már csak egy olyan lépéssort kell találjunk, amivel a maradék golyókat eggyel arrébb tesszük, miközben a többit a helyén hagyjuk. Ezt elérhetjük az alábbi táblázatban látható három lépéssel **(27 pont)**

				4. lépés				5. lépés				6. lépés		
										k_1				
					k_2					k_2				
					k_3	z_1				z_1				
z_1	k_1	s_1			k_1	s_1				s_1		k_1	s_1	z_1
k_2	s_2	z_2			s_2	z_2			s_2	z_2		k_2	s_2	z_2
k_3	s_3	z_3			s_3	z_3		k_3	s_3	z_3		k_3	s_3	z_3

Pontozás: 8 lépésnél kevesebb (helyes!) lépéssor, amely eléri a kívánt elrendezést – **27 pont**. Ha nincs teljes megoldás, akkor a következők szerint ajánlott pontozni:

1) Leírja, vagy a leírt lépések alapján úgy rendez, hogy a következő dobozba legyen legalább három golyó – **6 pont**

2) Leír 3 lépést a bevezetett szabály alapján – **9 pont**. Ha ezt a lépéssort egyszer vagy kétszer megismételve a golyók a helyükre kerülnek, de nincs leírva – **6 pont**

3) Leír több lépéssort azzal a céllal, hogy a golyókat adott szabályok szerint rendezze – **6 pont**

■

3. feladat (20 pont). Az 500 cm hosszúságú AB szakaszon felvesszük az $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{25}$ ($A \neq M_1, B \neq M_{25}$) pontokat ebben a sorrendben úgy, hogy az $AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, \ldots, M_{24}M_{25}$ szakaszok hossza 25 egymásutáni természetes szám legyen. Határozd meg az $M_{25}B$ szakasz hosszának legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét!

Matlap 9/2025, A:5174

Első megoldás. Hivatalból **(2 pont)**
Jelölje a az $M_{25}B$ szakasz hosszát (centiméterben) és x az AM_1 szakasz hosszát (szintén centiméterben). Így $x \in \mathbb{N}^*$ és a feladat szövege alapján $M_1M_2 = x+1, M_2M_3 = x+2, \ldots, M_{24}M_{25} = x+24$. **(2 pont)**
Mivel $AM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \ldots + M_{24}M_{25} + M_{25}B = AB$, felírhatjuk az

$$x + (x+1) + (x+2) + \ldots + (x+24) + a = 500 \qquad \textbf{(4 pont)}$$

egyenletet. Az egyenletet egyszerűbb alakra hozva kapjuk, hogy $25\cdot x+1+2+3+\ldots+24+a=500$, azaz $25\cdot x+25\cdot 12+a=500$, ahonnan $25\cdot x+a=200$. **(4 pont)**
Mivel a bal oldalon két tag összege áll és a jobb oldalon egy szám, ezért a pontosan akkor lesz a lehető legnagyobb, ha x a lehető legkisebb és a pontosan akkor lesz a lehető legkisebb, ha x a lehető legnagyobb. Az x legkisebb értéke 1, behelyettesítve az egyenletbe írhatjuk, hogy $25\cdot 1+a=200$, ahonnan a legnagyobb lehetséges értéke $a=175$ (és ez valóban lehetséges, hisz így az $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{24}M_{25}, M_{25}B$ szakaszok hosszai rendre $1, 2, 3, \ldots, 25, 175$). **(4 pont)**
Mivel $a>0$, ezért $25x<200$, tehát $x<8$ vagyis az x természetes szám legnagyobb lehetséges értéke 7. $x=7$ esetén $a=200-25\cdot 7=25$, amely az a lehető legkisebb értéke (és ez valóban lehetséges, hisz így az $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{24}M_{25}, M_{25}B$ szakaszok hosszai rendre $7, 8, 9, \ldots, 31, 25$). **(4 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(2 pont)**
Jelölje a az $M_{25}B$ szakasz hosszát és x az AM_1 szakasz hosszát (centiméterben). Így $x\in\mathbb{N}^*$ és a feladat szövege alapján $M_1M_2=x+1, M_2M_3=x+2, \ldots, M_{24}M_{25}=x+24$. **(2 pont)**
Mivel $AM_1+M_1M_2+M_2M_3+\ldots+M_{24}M_{25}+M_{25}B=AB$, felírhatjuk az

$$x+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+24)+a=500 \qquad \textbf{(4 pont)}$$

egyenletet. Egyszerűbb alakra hozva $\frac{(x+x+24)\cdot 25}{2}+a=500$, ahonnan kapjuk az $(x+12)\cdot 25+a=500$ egyenletet. **(4 pont)**

Mivel $[(x+12)\cdot 25]\,\vdots\,25$ és $500\,\vdots\,25$, ezért a is osztható kell legyen 25-tel. De $x+12\geq 13$, tehát $(x+12)\cdot 25\geq 325$. Ebből következik, hogy $a\leq 175$. **(4 pont)**

Mivel $a\in\mathbb{N}^*, a\,\vdots\,25$ és $a\leq 175$ az a lehetséges értékei $25, 50, 75, \ldots, 175$.
Tehát a legkisebb értéke 25, míg a legnagyobb értéke 175. Ezeket rendre az $x=7$, illetve az $x=1$ értékekre veszi fel. **(4 pont)**

■

4. feladat (20 pont). Nevezzük „jó”-nak azokat az (a,b) nullától különböző természetes számokból alkotott számpárokat, amelyekben az a és b legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének az összege 226.

a) Sorold fel a 225 osztóit!

b) Határozd meg azokat az (a,b) „jó” számpárokat, amelyekre a és b relatív prímek!

c) Hány olyan (a,b) alakú „jó” számpár létezik, amelyben a és b nem relatív prímek? Sorold fel az összeset!

Czeglédi Csilla, Arad

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) $225=15^2=3^2\cdot 5^2$, ezért 225 minden osztója $d=3^u\cdot 5^v$ alakú, ahol $u,v\in\{0,1,2\}$. Így összesen 9 osztója van a 225-nek és ezek a $D_{225}=\{1,3,5,9,15,25,45,75,225\}$ halmaz elemei. **(4 pont)**

Megjegyzés. Más érvelés is elfogadható, de a felsorolás nem teljes értékű (hacsak nem látta be az összes többi 225-nél kisebb számra, hogy azok nem lehetnek osztók).

b) Mivel a és b relatív prímek, a legnagyobb közös osztójuk 1 és a legkisebb közös osztójuk a két szám szorzata, tehát a szöveg alapján felírható az $1 + a \cdot b = 226$ egyenlet, ahonnan $a \cdot b = 225$.
(2 pont)
A 225 osztói 9 olyan rendezett számpárt határoznak meg, amelyben a számok szorzata 225. Ezek közül 5 párban a két szám nem relatív prím, tehát a keresett számpárok $(1, 225), (225, 1), (9, 25), (25, 9)$.
(2 pont)

c) Legyen d az a és b számok legnagyobb közös osztója, ekkor felírhatjuk, hogy $\begin{cases} a = d \cdot k \\ b = d \cdot p \end{cases}$, ahol k és p relatív prímek. **(2 pont)**
Ez alapján $[a; b] = d \cdot k \cdot p$. (ez következik a $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$ összefüggésből vagy a legkisebb közös többszörös értelmezéséből és tulajdonságaiból). Így $d \cdot k \cdot p + d = 226$, vagyis a közös tényező kiemelése után $d \cdot (k \cdot p + 1) = 226$ tehát d osztója a 226-nak. Másrészt $D_{226} = \{1, 2, 113, 226\}$ és sem a d, sem a $k \cdot p + 1$ nem lehet 1, tehát $d \in \{2, 113\}$. **(2 pont)**
Ha $d = 2$, akkor $k \cdot p + 1 = 113$, tehát $k \cdot p = 112$. Másrészt $D_{112} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112\}$, valamint k és p relatív prímek, tehát a (k, p) számpár az $\{(1, 112), (112, 1), (7, 16), (16, 7)\}$ halmaz elemei közül bármelyik lehet. Ebben az esetben az (a, b) számpár a $\{(2, 224), (224, 2), (14, 32), (32, 14)\}$ halmaznak tetszőleges eleme lehet. **(2 pont)**
Ha $d = 113$, akkor $k \cdot p + 1 = 2$, tehát $k \cdot p = 1$. Ez csak a $k = p = 1$ esetben teljesül, tehát $a = b = 113$. **(2 pont)**
A keresett „jó” számpárok száma tehát 5, és ezek a számpárok a következők:

$$(2, 224), (224, 2), (14, 32), (32, 14), (113, 113).$$

(2 pont)

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

Pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.