CENTRUL NAȚIONAL PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV
megyei szakasz, 2026. február 7.

VII. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az $\overline{ab}$ alakú természetes számokat, ha az $a+b$, $a-b$ és $a \cdot b$ számok egyenesen arányosak a 7, 1, illetve 12 számokkal.

Szász Hajnalka, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

Az arányosság
$$\frac{a+b}{7} = \frac{a-b}{1} = \frac{a \cdot b}{12} = k$$
alakban írható, ahol a és b számjegyek és $a \neq 0$. **(3 pont)**
Ekkor
$$a+b = 7k, \quad a-b = k, \qquad \textbf{(3 pont)}$$
ahonnan az első két egyenlőség összeadásából azt kapjuk, hogy $2a = 8k$, azaz $a = 4k$. **(6 pont)**
Mivel $b = a - k$ következik, hogy $b = 3k$. **(3 pont)**
Ha $k \geq 3$, akkor $4k \geq 12$, tehát a nem lenne számjegy. Így csak a $k = 1$ és $k = 2$ eseteket kell megvizsgálnunk. **(3 pont)**
Ha $k = 1$, akkor $a = 4$, $b = 3$ és valóban teljesül az $a \cdot b = 12$ egyenlőség. Tehát az $\overline{ab} = 43$ egy megoldás. **(3 pont)**
Ha $k = 2$, akkor $a = 8$, $b = 6$. Ezekre a számokra viszont $a \cdot b = 48 \neq 12 \cdot k$, tehát ebben az esetben nincs megoldás. **(3 pont)**
Összesítve: az egyetlen lehetséges megoldás $\overline{ab} = 43$. **(3 pont)**

■

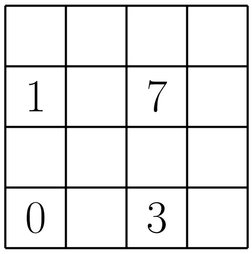
Második megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

Az arányosság
$$\frac{a+b}{7} = \frac{a-b}{1} = \frac{a \cdot b}{12} = k \qquad \textbf{(3 pont)}$$
alakba írható. Ez alapján
$$a+b = 7k \quad \text{és} \quad a-b = k, \qquad \textbf{(3 pont)}$$
tehát a két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy
$$2a = 8k, \text{ vagyis } a = 4k. \qquad \textbf{(3 pont)}$$
Ha $a = 4k$, akkor az $a + b = 7k$ egyenlőségből következik, hogy $b = 3k$. **(6 pont)**
Az előbbi összefüggések alapján
$$a \cdot b = 12k^2. \qquad \textbf{(3 pont)}$$
Az arányosság feltételéből viszont
$$a \cdot b = 12k,$$

tehát $k = k^2$. Ez csak akkor lehetséges, ha $k = 0$ vagy $k = 1$. (**3 pont**)
$k = 0$ esetén $a = 0$ volna és ez nem lehetséges. $k = 1$ esetén $a = 4$ és $b = 3$ és ezek az értékek teljesítik az összes feltételt. (**3 pont**)
Tehát az egyetlen szám, amely teljesíti a megadott feltételeket az $\overline{ab} = 43$. (**3 pont**)

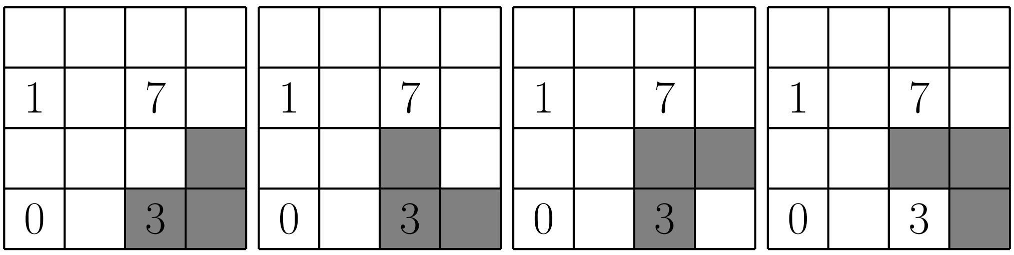
■

2. feladat (30 pont). Az ábrán látható négyzetrács 16 négyzete közül néhányat szürkére kell satírozni úgy, hogy a négyzetekbe beírt számok a számot tartalmazó és az azzal szomszédos négyzetek közül a szürkére satírozott négyzetek számával legyenek egyenlők. Határozd meg satírozás után a szürke négyzetek számát! Hányféleképpen végezhetjük el a satírozást? (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk vagy közös csúcsuk.)

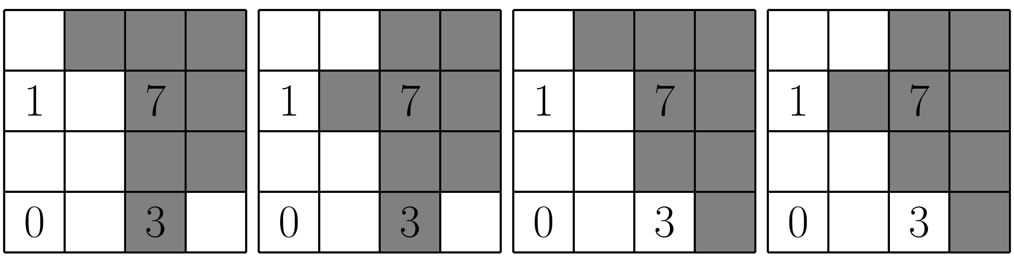


Matlap 10/2025, A:5195

Megoldás. Hivatalból (**3 pont**)
Induljunk a bal alsó sarokból. Mivel ott 0 van, azt jelenti, hogy sem a 0-t tartalmazó, sem pedig a három szomszédos négyzet nem szürke. (**3 pont**)
Következzen a 3-at tartalmazó négyzet. A jobb alsó 2×2-es sarok négy négyzetéből három szürke kell legyen. Ebből az ábrán látható négy eset adódik. (**6 pont**)



Az első két esetben, ha a 7-et tartalmazó négyzetet vesszük figyelembe, akkor be kellene satírozni további hat négyzetet, amely szomszédos ezzel a négyzettel. Ez csak úgy lehetséges, ha az első és második sor utolsó $3-3$ négyzetét besatírozzuk. Ekkor viszont az 1-gyel jelölt négyzetnek lenne két besatírozott szomszédos négyzete. Tehát ezek az esetek nem vezetnek megoldáshoz. (**6 pont**)
A harmadik és a negyedik esetben, a 7-es miatt a jobb felső 2×3-as téglalap 6 kis négyzete közül pontosan 5-öt kell besatírozni és az 1-es miatt a második oszlop első két négyzete közül csak legfeljebb az egyiket lehet besatírozni. Így csak a következő satírozások lehetségesek: (**6 pont**)



Látható, hogy ezek a megoldások minden feltételnek megfelelnek. (**3 pont**)
Tehát négyféle módon végezhető el a satírozás, és minden esetben 8 szürke négyzetünk lesz. (**3 pont**)

Megjegyzés. A feladat bármelyik értéket tartalmazó mezőből kiindulva hasonlóan levezethető.

■

3. feladat (20 pont). Az $ABCD$ négyzeten kívül vedd fel az E és F pontokat úgy, hogy $\widehat{AFB} = \widehat{DEC} = 90^\circ$ és $\widehat{EDC} \equiv \widehat{FBA}$.

a) Bizonyítsd be, hogy

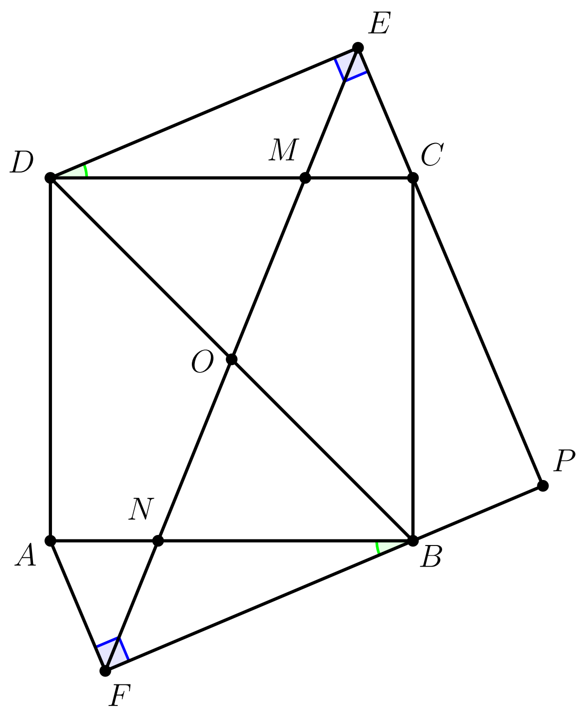
$$T_{EFBC} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABCD} + T_{AFB}.$$

b) Határozd meg a DEF szög mértékét!

c) Igazold, hogy az EF egyenes átmegy a négyzet középpontján!

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (**2 pont**)



a) A feltételek alapján az EDC és FBA derékszögű háromszögek kongruensek (mert az átfogók kongruensek és D-nél levő hegyesszög egyenlő a B-nél levő hegyesszöggel). (**2 pont**)
Ez alapján $EC = AF$ és $\widehat{ECM} = \widehat{FAN}$, ahol $EF \cap DC = \{M\}$ és $EF \cap AB = \{N\}$. Másrészt

$$\widehat{EMC} \overset{\text{csúcsszögek}}{=} \widehat{DMN} \overset{DC \| AB}{=} \widehat{MNB} \overset{\text{csúcsszögek}}{=} \widehat{FNA},$$

tehát az EMC és FNA háromszögek kongruensek. (**2 pont**)
Innen következik, hogy

$$T_{ECM_\triangle} + T_{BFN_\triangle} = T_{AFB_\triangle}$$ (**2 pont**)

Az $NBCM$ trapéz területe

$$T_{NBCM} = \frac{(NB + MC) \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} T_{ABCD}.$$

A fentiek alapján

$$T_{EFBC} = T_{ECM} + T_{BFN} + T_{BNMC} = \frac{1}{2} T_{ABCD} + T_{AFB}$$ **(2 pont)**

b) Ha $EC \cap FB = \{P\}$, akkor $\widehat{EDC} \equiv \widehat{PCB}$ mert merőleges szárú szögek, tehát

$$EDC_\Delta \equiv PCB_\Delta \text{ (átfogó és szög esete)}$$ **(2 pont)**

Ebből következik, hogy $PC \equiv DE \equiv FB$ és $EC \equiv PB$, tehát

$$EP \equiv FP$$ **(2 pont)**

és így a PEF_Δ egyenlő szárú és derékszögű, vagyis $\widehat{PEF} = 45°$. Ebből következik, hogy $\widehat{DEF} = 45°$. **(2 pont)**

c) A $DEBF$ négyszög paralelogramma, mert $DE \equiv FB$ és $DE||FB$ (mivel a DEF és EFP belső váltószögek kongruensek $\widehat{DEF} = 45° = \widehat{EFP}$ alapján). **(2 pont)**
A $DEBF$ paralelogrammában az EF átló áthalad a DB átló felezőpontján, ami az $ABCD$ négyzet középpontja. **(2 pont)**

■

Megjegyzés. a) Ha előbb igazoljuk, hogy az EF egyenes átmegy a négyzet középpontján, akkor látható, hogy

$$T_{EFBC} = T_{EOBC} + T_{OFB}$$

Mivel $DEO_\Delta \equiv DFO_\Delta$, így

$$T_{EFBC} = T_{EOBC} + T_{ODE} = T_{DBCE}.$$

Ezt két háromszög területére bontva kapjuk, hogy

$$T_{EFBC} = T_{DBC} + T_{CED}.$$

Az előző alpontból tudjuk, hogy $CED_\Delta \equiv FAB_\Delta$, tehát

$$T_{EFBC} = \frac{1}{2} T_{ABCD} + T_{FAB}.$$

b) Ha $\{Q\} = DE \cap AF$, akkor belátható, hogy $QEPF$ egy négyzet, amelybe beírtuk az $ABCD$ négyzetet és a sarokban levő négy háromszög (DEC, CPB, BFA, AQD) kongruens. Ebből több különböző gondolatmenettel is következik mindhárom alpont.

4. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy bármilyen $\overline{abc}$ alakú szám esetén az $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ összeg osztható 111-gyel!

b) Keresd meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, amelyre teljesül, hogy

$$\sqrt{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{a0}+\overline{b0}+\overline{c0}}=\overline{ab}.$$

Köncse Balázs, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) Felbontjuk a három számot:

$$\overline{abc}=100a+10b+c$$
$$\overline{bca}=100b+10c+a$$
$$\overline{cab}=100c+10a+b$$
(2 pont)

A megfelelő oldalakat összeadva és a, b, illetve c szerint csoportosítva a következő eredményhez jutunk:

$$\begin{aligned}\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}&=100a+10a+a+100b+10b+b+100c+10c+c\\&=111a+111b+111c\\&=111\cdot(a+b+c)\end{aligned}$$
(2 pont)

A $111\cdot(a+b+c)$ pedig osztható 111-gyel, így

$$(\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}) ⋮ 111.$$

b) Ha $S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{a0}+\overline{b0}+\overline{c0}$, akkor

$$\begin{aligned}S&=100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10a+b+10a+10b+10c\\&=121a+121b+121c\\&=121(a+b+c).\end{aligned}$$
(2 pont)

Ebből következik, hogy

$$\sqrt{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{a0}+\overline{b0}+\overline{c0}}=\sqrt{121(a+b+c)}=11\sqrt{a+b+c}=\overline{ab},$$
(2 pont)

vagyis $\overline{ab}^2=11^2\cdot(a+b+c)$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{ab}^2 ⋮ 11^2$ vagyis $\overline{ab} ⋮ 11$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $a=b$. Ekkor viszont a megadott egyenlőség egyenértékű a

$$11\sqrt{2a+c}=11\cdot a$$

egyenlőséggel, tehát $\sqrt{2a+c}=a$ **(2 pont)**

Mivel a, c számjegyek, ezért

$$\sqrt{2a+c}\leq\sqrt{27}<6,$$

így

$$a<6.$$
(2 pont)

Ha $a=1$, akkor $\sqrt{2+c}=1$ nincs megoldás.
Ha $a=2$, akkor $\sqrt{4+c}=2 \implies c=0$ (nem lehetséges, mert $\overline{c0}$ kétjegyű szám).
Ha $a=3$, akkor $\sqrt{6+c}=3 \implies c=3$.

Ha $a = 4$, akkor $\sqrt{8 + c} = 4 \implies c = 8$.
Ha $a = 5$, akkor $\sqrt{10 + c} = 5 \implies c = 15$, ami nem számjegy. (**4 pont**)

A megoldások így $\overline{abc} \in \{333, 448\}$. (**2 pont**)

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

Pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.