CENTRUL NAȚIONAL PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV

megyei szakasz, 2026. február 7.

VIII. osztály

1. feladat (30 pont). Adottak az

$$a = (\sqrt{2}-1)^{-1} + |1-\sqrt{2}| - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - (2\sqrt{2})^{-1}\right) \cdot 2\sqrt{2} \quad \text{és}$$

$$b = \left(\left(\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^{-1} + \left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}\right)^{-1}\right) \cdot \left(\sqrt{9+4\sqrt{2}} + \sqrt{9-4\sqrt{2}}\right)$$

valós számok.

a) Számítsd ki az a és b számok egész részét!

b) Igazold, hogy az

$$E = \sqrt{4-4a+a^2} + \sqrt{b^2-6b+9} - \sqrt{a^2-2ab+b^2}$$

egész szám!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Az a számot egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{2} - 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1-(2-1) \\ &= 2\sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

Mivel $\sqrt{2} \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, ezért $2\sqrt{2} \in (2,3)$, így $a \in (1,2)$. Tehát az a szám egész része $[a] = 1$. **(9 pont)**

A b számot is egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned}
b &= \left(\left(\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^{-1}+\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}\right)^{-1}\right)\cdot\left(\sqrt{9+4\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}\right)\\
&= 1+\sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{9+4\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{9+4\sqrt{2}}{9-4\sqrt{2}}}+1\\
&= 2+\frac{\sqrt{(9-4\sqrt{2})^2}}{\sqrt{49}}+\frac{\sqrt{(9+4\sqrt{2})^2}}{\sqrt{49}}\\
&= 2+\frac{|9-4\sqrt{2}|}{7}+\frac{|9+4\sqrt{2}|}{7}\\
&= 2+\frac{9-4\sqrt{2}}{7}+\frac{9+4\sqrt{2}}{7}\\
&= 2+\frac{18}{7}=\frac{32}{7}.
\end{aligned}$$

Mivel $\frac{32}{7}\in(4,5)$, ezért a b szám egész része $[b]=4$. **(6 pont)**

Megjegyzés. Észrevehetjük, hogy $9+4\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})^2$ és $9-4\sqrt{2}=(1-2\sqrt{2})^2$, így rövidebben is kiszámítható a b értéke.

b)

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{4-4a+a^2}+\sqrt{b^2-6b+9}-\sqrt{a^2-2ab+b^2}\\
&= \sqrt{(2-a)^2}+\sqrt{(b-3)^2}-\sqrt{(a-b)^2}\\
&= |2-a|+|b-3|-|a-b|.
\end{aligned}$$

(6 pont)

Továbbá

$$\begin{aligned}
a<2 &\implies |2-a|=2-a,\\
b>3 &\implies |b-3|=b-3,\\
a<b &\implies |a-b|=b-a.
\end{aligned}$$

(3 pont)

Ez alapján

$$\begin{aligned}
E &= 2-a+b-3-(b-a)\\
&= 2-a+b-3-b+a\\
&= -1\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(3 pont)

■

2. feladat (30 pont). Az a és b nullától különböző természetes számok, $a>b$ és $m_a-m_g=18$, ahol m_a és m_g az a és b számok számtani, illetve mértani közepét jelöli. Határozd meg az a és b természetes számokat a következő esetekben:

a) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=18$

b) $a-b=120$

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Felhasználva, hogy $m_a=\frac{a+b}{2}$ és $m_g=\sqrt{ab}$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=18. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Átalakítások után

$$a+b-2\sqrt{ab}=36 \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=36. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Mivel $a>b$, ezért $\sqrt{a}-\sqrt{b}=6$. **(3 pont)**
Tehát

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=18 \text{ és } \sqrt{a}-\sqrt{b}=6,$$

ahonnan következik, hogy $a=144$ és $b=36$. **(6 pont)**

b) Az $a-b=120$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=120$. **(3 pont)**
Másrészt $\sqrt{a}-\sqrt{b}=6$, így $\sqrt{a}+\sqrt{b}=20$. **(3 pont)**
Tehát

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=20 \quad \text{és} \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=6,$$

ahonnan következik, hogy $a=169$ és $b=49$. **(6 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Mivel $a,b\in\mathbb{N}^*$ és $\sqrt{a}+\sqrt{b}=18\in\mathbb{N}$, ezért ismert, hogy $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ is természetes szám kell, hogy legyen. **(3 pont)**
Mivel $a>b$, ezért $\sqrt{a}>\sqrt{b}$. Ha $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{N}^*$ és $\sqrt{a}+\sqrt{b}=18$, valamint $\sqrt{a}>\sqrt{b}$, következik, hogy

$$(\sqrt{a},\sqrt{b})\in\big\{(17,\,1),\,(16,\,2),\,(15,\,3),\,(14,\,4),\,(13,\,5),\,(12,\,6),\,(11,\,7),\,(10,\,8)\big\},$$

vagyis

$$(a,b)\in\big\{(289,\,1),\,(256,\,4),\,(225,\,9),\,(196,\,16),\,(169,\,25),\,(144,\,36),\,(121,\,49),\,(100,\,64)\big\},$$

(6 pont)

ahonnan

$$(m_a,m_g)\in\big\{(145,\,17),\,(130,\,32),\,(117,\,45),\,(106,\,56),\,(97,\,65),\,(90,\,72),\,(85,\,77),\,(82,\,80)\big\}.$$

Ezek a számpárok közül csak az $a=144$ és $b=36$ esetén lesz az $m_a-m_g=18$. **(6 pont)**

b) Hasonlóan, mint az előző megoldás esetén.

■

3. feladat (20 pont). Adott az $ABCD$ négyzet és a térben egy olyan P pont, amelyre a PAD háromszög egyenlő szárú és P-ben derékszögű, illetve a PBC háromszög egyenlő oldalú.

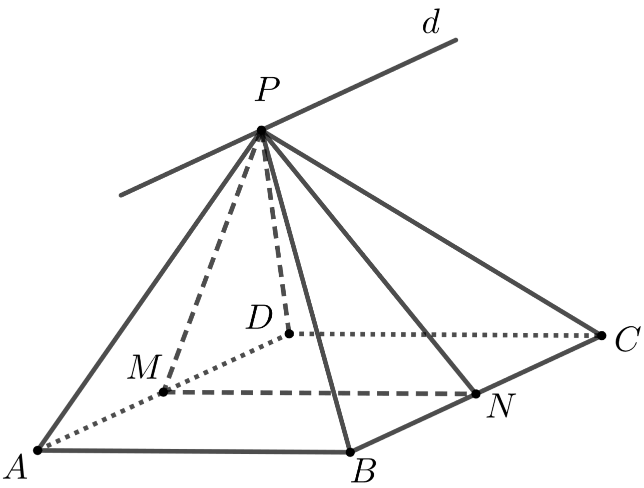
a) Igazold, hogy a (PAD) és (PBC) síkok merőlegesek egymásra!

b) Határozd meg a (PAD) és (PBC) síkoknak az $(ABCD)$ síkkal alkotott szögét!

c) Bizonyítsd be, hogy az A pontnak a PD szakasz felezőpontja szerinti szimmetrikusa egybeesik a B pontnak a PC egyenes szerinti szimmetrikusával!

Simon József, Csíkszereda, Matlap 10/2025, A:2504

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**



a) Legyen d a P ponton áthaladó, AD-vel párhuzamos egyenes. Így d benne van a (PAD) síkban és mivel $AD||BC$, a (PBC) síkban is. Tehát a (PAD) és (PBC) síkok metszésvonala a d egyenes. Jelölje M, illetve N az AD, valamint a BC szakasz felezőpontját, és legyen a négyzet oldalhossza $BC = a$. Mivel a PBC háromszög egyenlő oldalú, így $PN \perp BC$, de $BC \parallel d$, ezért $PN \perp d$. A PAD háromszögben $PA = PD$, ezért $PM \perp AD$, de $AD \parallel d$, így $PM \perp d$. Tehát a (PAD) és (PBC) síkok szöge az MPN szög. **(4 pont)**

Megjegyzés. Ha a versenyző csak megnevezi a két sík szögét, de nem indokolja meg, akkor 2 pont jár.

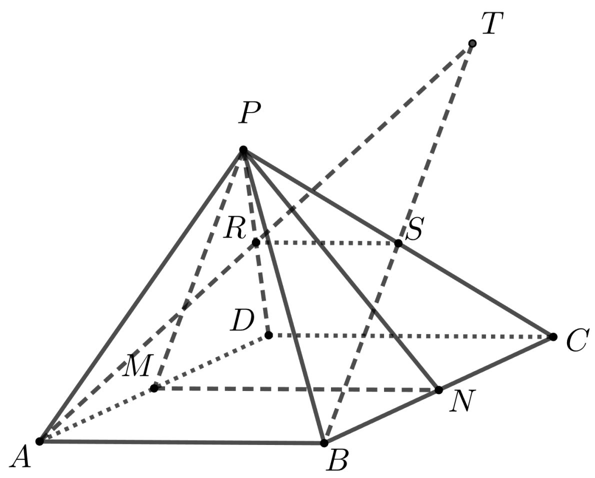
Az a oldalhosszú PBC egyenlő oldalú háromszögben PN magasság, ezért $PN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A PAD egyenlő szárú derékszögű háromszögben $PM = AM = MD = \frac{a}{2}$. A PMN háromszögben

$$PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 = MN^2,$$

tehát $\widehat{MPN} = 90°$, vagyis $PM \perp PN$, innen következik, hogy a (PAD) és (PBC) síkok merőlegesek egymásra. (**4 pont**)

b) Mivel $PM \perp AD$ és $MN \perp AD$, ezért a (PAD) és az $(ABCD)$ síkok szöge a PMN szög. (**2 pont**)
Továbbá $PN \perp BC$ és $MN \perp BC$, ezért a (PBC) és az $(ABCD)$ síkok szöge a PNM szög. (**2 pont**)
Tehát meg kell határozni a PMN derékszögű háromszögben a hegyesszögek mértékét. A PMN háromszögben a P szög $90°$, $MN = a$ és $PM = \frac{a}{2}$, ezért $\widehat{PNM} = 30°$ és $\widehat{PMN} = 60°$. (**2 pont**)

c) Jelölje R, illetve S a PD, valamint a PC szakasz felezőpontját.



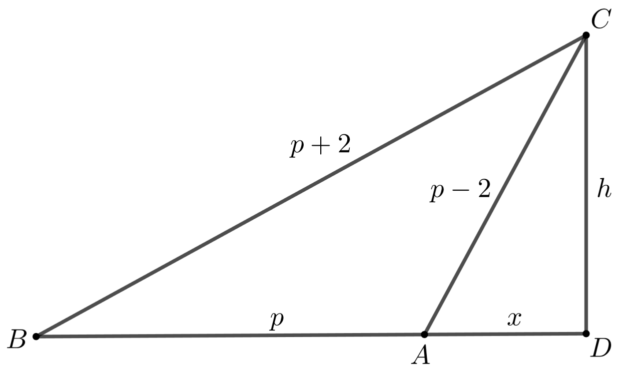
Az RS szakasz középvonal a PDC háromszögben, ezért $RS \parallel DC$ és $RS = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$. De $DC \parallel AB$, ezért $RS \parallel AB$, tehát az A, B, R és S pontok egy síkban vannak, ezért AR és BS metsző egyenesek. Legyen T az AR és BS egyenesek metszéspontja. Az $RS \parallel AB$ és $RS = \frac{AB}{2}$, ezért RS középvonal az ABT háromszögben, tehát T az A pontnak az R felezőpont szerinti és a B pontnak az S pont szerinti szimmetrikusa. Mivel S a PC felezőpontja, ezért $BS \perp PC$ a PBC egyenlő oldalú háromszögben, így a B pont PC egyenes szerinti szimmetrikusa megegyezik a B pont S pont szerinti szimmetrikusával. (**4 pont**)

■

4. feladat (20 pont). Egy tompaszögű háromszög oldalhosszai méterben kifejezve 2-nél nagyobb egymás utáni páratlan természetes számok, és egyik sem négyzetszám. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát és a tompaszög mértékét!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Első megoldás. Hivatalból (**2 pont**)
Legyenek a háromszög oldalai méterben kifejezve $AC = p - 2$, $AB = p$ és $BC = p + 2$ hosszúságúak, p páratlan és $p \geq 5$. Mivel BC a leghosszabb, ezért az A szög a tompaszög. (**2 pont**)
Jelölje D a C pontnak az AB-re eső merőleges vetületét. Az $AD = x$ méter és a $CD = h$ méter.



Mivel az ADC és a BDC háromszög derékszögű a D-ben, Pitagorasz tétele alapján

$$x^2 + h^2 = (p-2)^2 \quad \text{és}$$
$$(p+x)^2 + h^2 = (p+2)^2. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

A két összefüggést kivonva egymásból azt kapjuk, hogy $(p+x)^2 - x^2 = (p+2)^2 - (p-2)^2$, ahonnan

$$p^2 + 2px = 8p.$$

Ezt elosztva $p \geq 5$-tel

$$p + 2x = 8. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Mivel $p \geq 5$ páratlan természetes szám, ezért $p = 5$ vagy $p = 7$. **(2 pont)**
Ha $p = 7$, akkor $p + 2 = 9$, ami négyzetszám, ezért nem megoldás. **(2 pont)**
Ha $p = 5$, akkor $p - 2 = 3$, $p + 2 = 7$ és $x = 1{,}5$. Ebben az esetben $AC = 2AD$, tehát az ADC derékszögű háromszögben $\widehat{C} = 30°$ és $\widehat{A} = 60°$. **(2 pont)**
Tehát az ABC háromszögben a tompaszög $120°$, az oldalak pedig 3 m, 5 m és 7 m hosszúságúak. **(2 pont)**

■

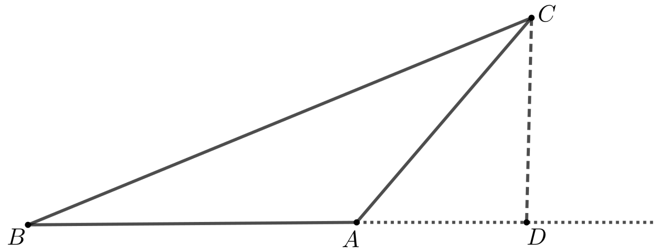
Második megoldás. Hivatalból **(2 pont)**
Legyenek a háromszög oldalai méterben kifejezve $AC = 2l + 1$, $AB = 2l - 1$ és $BC = 2l + 3$ hosszúságúak, ahol $l \geq 2$. Mivel ABC tompaszögű háromszög, ezért

$$\begin{aligned} & BC^2 > AB^2 + AC^2 \qquad \textbf{(4 pont)} \\ \iff & (2l+3)^2 > (2l-1)^2 + (2l+1)^2 \\ \iff & 0 > 4l^2 - 12l - 7 \\ \iff & 0 > 4l^2 - 12l + 9 - 16 \\ \iff & 16 > (2l-3)^2. \end{aligned}$$

Mivel $l \geq 2$ természetes szám, ezért az l lehetséges értékei: 2 és 3. **(6 pont)**
Ha $l = 3$, akkor $BC = 9$, ami négyzetszám, tehát nem lehetséges. Ha $l = 2$, akkor $AB = 3$, $AC = 5$ és $BC = 7$. **(4 pont)**
Ebben az esetben a háromszög területe Héron képlete alapján

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2} - 3\right)\left(\frac{15}{2} - 5\right)\left(\frac{15}{2} - 7\right)} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Ugyanakkor $T_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2}$, ahol CD az ABC háromszög C csúcsából húzott magassága.



Ez alapján

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot CD}{2} \Longrightarrow CD = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Az ADC háromszögben

$$\sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

így $\widehat{DAC} = 60°$, tehát $\widehat{BAC} = 120°$. (**4 pont**)

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

Pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.