CENTRUL NAȚIONAL PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV
megyei szakasz, 2026. február 7.

IX. osztály

1. feladat (30 pont). Az a, b, c egymástól páronként különböző valós számokra teljesülnek az

$$a^3 + ax = b^3 + bx = c^3 + cx$$

összefüggések, ahol x egy adott valós szám.

a) Mutasd ki, hogy $a + b + c = 0$.

b) Igazold, hogy

$$|a + y| + |1 + y - b| \geq |c + 1|, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Cziprok András, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) $a^3 + ax = b^3 + bx \iff a^3 - b^3 + (a - b)x = 0 \iff (a - b)(a^2 + ab + b^2 + x) = 0$, de $a - b \neq 0$, így $a^2 + ab + b^2 + x = 0$. **(6 pont)**

Hasonlóan $b^2 + bc + c^2 + x = 0$. **(3 pont)**

A két egyenletet kivonva egymásból kapjuk, hogy $a^2 - c^2 + b(a - c) = 0 \iff (a - c)(a + b + c) = 0$, ahonnan mivel $a \neq c$ következik, hogy $a + b + c = 0$. **(6 pont)**

b) $a + b + c = 0 \implies a + b = -c$. **(3 pont)**

Használva a háromszög-egyenlőtlenséget írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} |a + y| + |1 + y - b| &= |a + y| + |-(1 + y - b)| && \textbf{(3 pont)} \\ &= |a + y| + |b - y - 1| \geq |a + y + b - y - 1| && \textbf{(3 pont)} \\ &= |-c - 1| = |c + 1|, \forall y \in \mathbb{R}. && \textbf{(3 pont)} \end{aligned}$$

■

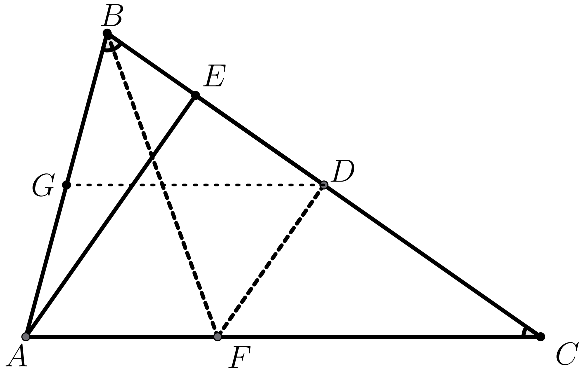
2. feladat (30 pont). Az ABC hegyesszögű háromszögben $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ és D a BC oldal felezőpontja. Ha E a D kezdőpontú DB félegyenes azon pontja, amelyre $AB = 2DE$, akkor bizonyítsd be, hogy:

a) E a B és D pontok között található;

b) AE az ABC háromszög magassága!

Matlap 10/2025, L:3948
Olasz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**



a) Jelöljük az $\widehat{ACB}$ mértékét α-val. A feltétel alapján $\widehat{ABC} = 2\alpha$. Ugyanakkor az ABC háromszög hegyesszögű, tehát $2\alpha < 90°$ és így $\alpha < 45°$. **(3 pont)**

Ha G az AB felezőpontja, akkor $GB = \frac{AB}{2} = DE$. Viszont a BGD háromszögben $\widehat{BDG} = \alpha$ (mert GD középvonal, tehát párhuzamos AC-vel), $\widehat{GBD} = 2\alpha$, tehát $\widehat{BGD} = 180° - 3\alpha$. Az $\alpha < 45°$ egyenlőtlenség alapján $180° - 3\alpha > \alpha$, tehát $BD > BG$ mert a BGD háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van. **(6 pont)**

Ebből következik, hogy $DE = GB < DB$, tehát E a BD szakasz belső pontja. **(3 pont)**

b) Ha BF az $\widehat{ABC}$ szögfelezője ($F \in AC$), akkor $\widehat{FBC} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha = \widehat{FCB}$, tehát $BFC\triangle$ egyenlő szárú. **(6 pont)**

$$\left.\begin{array}{l} BFC\triangle \text{ egyenlő szárú} \\ D \text{ a } BC \text{ felezőpontja} \end{array}\right\} \Rightarrow FD \perp BC.$$

Mivel BF az $\widehat{ABC}$ szögfelezője, a szögfelezőtétel alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FC}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Ekkor Thálesz fordított tételét alkalmazva írhatjuk, hogy

$$\frac{ED}{DC} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FC} \overset{\text{Th. f.t.}}{\Longrightarrow} FD \parallel AE. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$\left.\begin{array}{r} FD \perp BC \\ FD \parallel AE \end{array}\right\} \Rightarrow AE \perp BC \Rightarrow AE \text{ az } ABC\triangle \text{ magassága.} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

■

3. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy:

$$\sqrt{1+a} < 1 + \frac{a}{2}, \quad \forall a > 0.$$

b) Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladványt, amelyben $r > 0, a_1 > 0$ és $4a_1a_2 > 1$. Képezzük az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{r}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}}$$

összeget, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

Mutasd ki, hogy $[S_n] = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ahol $[x]$ az x szám egész részét jelöli.

Cziprok András, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) $\sqrt{1+a} < \sqrt{1+a+\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2} = 1+\frac{a}{2}, \forall a > 0$, ahol felhasználtuk, hogy $1+\frac{a}{2} > 0$. **(6 pont)**

b)

$$\begin{aligned} 1+\frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} &= 1+\frac{2r}{2a_k a_{k+1} a_{k+2}} \\ &= 1+\frac{a_{k+2}-a_k}{2a_k a_{k+1} a_{k+2}} \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}}\right), \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$ **(2 pont)**

Mivel $a_1 > 0, r > 0$, ezért $a_n > 0$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Felhasználva az a) alpont eredményét írhatjuk, hogy:

$$\sqrt{1+\frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}} < 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = 1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}}\right).$$ **(2 pont)**

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}} &< \sum_{k=1}^{n} \left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}}\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}}\right) \end{aligned}$$ **(2 pont)**

$$= n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right) < n+\frac{1}{4a_1 a_2} < n+1, \quad \text{mivel } 4a_1 a_2 > 1.$$ **(2 pont)**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}} > \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1} = n$$ **(2 pont)**

A fenti két összefüggésből adódik, hogy $n < S_n < n+1$, ahonnan $[S_n] = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **(2 pont)**

■

4. feladat (20 pont). a) Egy város általános és középiskolai tagozatain (5. osztálytól 12. osztályig) összesen 2026 diák jár. Ha minden évfolyamon legfeljebb 5 különböző iskolából vannak a tanulók, akkor igazold, hogy van egy iskola a városban, ahonnan legalább 26 fiú vagy legalább 26 lány származik ugyanarról az évfolyamról!

b) Igazold, hogy 2025 tetszőleges egész szám közül kiválasztható 324 darab szám, amelyeknek összege osztható 36-tal!

Köncse Balázs, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) Ha minden évfolyamon legfeljebb 5 különböző iskolából vannak tanulók, akkor legtöbb $8 \cdot 5 = 40$ csoport van, amelyek egy iskola egy évfolyamba tartozó diákjait tartalmazzák (és nem üresek). **(2 pont)**
Mivel $2026 : 40 = 50$, maradék 26, ezért van olyan iskola, amelynek valamelyik évfolyamán legalább 51 diák van (mert ha minden iskola minden évfolyamán legfeljebb 50 diák volna, akkor a diákok száma legtöbb $40 \cdot 50 = 2000$ lehetne). **(4 pont)**
Így ennek az iskolának a szóban forgó évfolyamán kell lennie legalább 26 lánynak vagy legalább 26 fiúnak. **(2 pont)**

b) Igazoljuk, hogy bármely három egész szám közül kiválasztható 2, amelynek összege páros. Valóban: három szám közül kettő azonos paritású, ekkor összegük osztható 2-el. **(2 pont)**
Igazoljuk, hogy bármely öt egész szám közül kiválasztható három, amelynek összege osztható hárommal. Ha a számok között van három olyan, amely hárommal osztva ugyanazt a maradékot adja, akkor az összegük osztható hárommal. Ha nincs köztük három olyan, amely hárommal ugyanazt a maradékot adná, akkor van köztük $3k_1, 3k_2 + 1, 3k_3 + 2$ alakú ($k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$), amelyeknek az összege osztható hárommal, így mindig van köztük három, amelynek összege osztható hárommal. **(4 pont)**
Így tizenöt szám között van három számhármas, amelyekben a számok összege osztható 3-al. Ha a három számhármasban a számok összege rendre a, b, c, akkor mivel mindhárom osztható 3-mal, ezért $a + b + c = 3k_1 + 3k_2 + 3k_3$, ahol $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. A fenti tulajdonság alapján a k_1, k_2, k_3 számok közül kiválasztható kettő, amelyek összege páros, legyen például k_1, k_2, ekkor $a + b = 3(k_1 + k_2)$ osztható hattal. Ezzel kimutattuk, hogy bármely 15 szám közül kiválasztható hat, amelyeknek összege osztható hattal. **(2 pont)**
A 2025 számot osszuk fel 135 darab, egyenként 15 elemű csoportra. Az előzőek szerint mindegyik 15-ös csoportból kiválasztható 6 szám úgy, hogy összegük 6-tal osztható legyen. Jelölje az így kiválasztott szám hatosok összegét rendre S_i $i \in \{1, \ldots, 135\}$. Így $S_i = 6t_i$ valamely $t_i \in \mathbb{Z}$ esetén. Most a $t_1, t_2, \ldots, t_{135}$ számokat osszuk fel 9 darab, egyenként 15 elemű csoportra. Alkalmazva ismét a fenti állítást (a 15 számra), mindegyik ilyen 15-ös csoportból kiválasztható 6 darab t_i úgy, hogy összegük 6-tal osztható legyen. Ennek megfelelően a kiválasztott $S_i = 6t_i$ összegek összege $\sum S_i = 6 \sum t_i$ 36-tal osztható. Mivel egy-egy S_i mindig 6 darab eredeti szám összege, a kiválasztott hat S_i szám összege $6 \cdot 6 = 36$ szám kiválasztását jelenti az eredeti számok közül. Ezt 9-szer végezzük el (mert a $t_1, t_2, \ldots, t_{135}$ számokat 9 csoportra bontottuk), ezért összesen a 9 csoportból kiválasztható $9 \cdot 36 = 324$ darab szám, amelyek összege osztható 36-tal. **(2 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) Mivel összesen 8 évfolyam van és $2025 : 8 = 253$, maradék 1, a skatulyaelv miatt létezik olyan évfolyam, amelyre legalább 254 diák jár. **(2 pont)**
Mivel egy évfolyamra legfeljebb 5 iskolából járnak tanulók és $254 : 5 = 50$, maradék 4, van olyan iskola, ahol egy évfolyamon legalább 51 tanuló jár. **(4 pont)**
Így az 51 tanulóból legalább 26 lány vagy legalább 26 fiú. **(2 pont)**

b) Osszuk a 2025 számot 36 csoportba (maradékosztályba) aszerint, hogy mennyi a 36-tal való osztási maradékuk ($0, 1 \ldots 35$ maradékok szerint). Mivel $2025 : 36 = 56$, maradék 9, a skatulyaelv alapján létezik olyan csoport, amely legalább 57 elemet tartalmaz. **(2 pont)**
Ebből a csoportból válasszunk ki 36 tetszőleges számot, legyenek ezek $x_1, x_2, \ldots, x_{36}$. Mivel mindegyiknek 36-tal ugyanaz a maradéka, ezért $x_i = 36k_i + r$, ahol $i \in \{1, 2, \ldots, 36\}$, tehát

$$\sum_{i=1}^{36} x_i = \sum_{i=1}^{36}(36k_i + r) = 36\sum_{i=1}^{36} k_i + 36r,$$

ami osztható 36-tal. Vagyis a kiválasztott 36 szám összege osztható 36-tal. **(2 pont)**
Távolítsuk el ezt a 36 számot. Marad 1989 szám. Ismét osszuk ezeket el 36 csoportba a 36-tal való osztási maradékok alapján. Mivel $1989 : 36 = 55$, a maradék 9, van olyan csoport, amely legkevesebb 56 számot tartalmaz. Ha ebből ismét kiválasztunk 36 tetszőleges számot, akkor azok összege osztható 36-tal. **(2 pont)**
Az előbbi két lépést megismételhetjük még 7 alkalommal. A legutolsó esetben 1733 számból lesz egy maradékosztály, ahol 49 elem van. Ezekből választhatjuk ki az utolsó 36-os csoportot. Így kiválasztottunk 9 egyenként 36 elemű számcsoportot, amelyek mindegyikének összege osztható 36-tal. Ennek a 9 csoportnak az összege is osztható lesz 36-tal, tehát kiválasztottunk $36 \cdot 9 = 324$ számot, amelyeknek az összege osztható 36-tal. **(4 pont)**

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

Pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.