CENTRUL NAȚIONAL PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV
megyei szakasz, 2026. február 7.

X. osztály

1. feladat (30 pont). a) Az a és b pozitív valós számok teljesítik az

$$a^2 + b^2 = 2024ab$$

összefüggést. Igazold, hogy

$$\lg \frac{a+b}{\sqrt{2026}} = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$

b) Igazold, hogy ha $x, y, z, w > 1$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\log_w \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 - \log_{\frac{1}{w}} \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3 \geq 2 \cdot \log_w \left(xyz \cdot \sqrt{xyz}\right).$$

Forgács István, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) A megadott

$$a^2 + b^2 = 2024ab$$

egyenlőség mindkét oldalához adjunk $2ab$-t, hogy a bal oldalon kialakítsuk az $(a+b)$ teljes négyzetét:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2024ab + 2ab \Longleftrightarrow$$

$$(a+b)^2 = 2026ab.$$ **(3 pont)**

Elosztva az egyenlet mindkét oldalát 2026-tal, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{(a+b)^2}{2026} = ab \Longleftrightarrow \lg\left(\frac{(a+b)^2}{2026}\right) = \lg(ab).$$ **(3 pont)**

Alkalmazzuk a logaritmus tulajdonságait, a bal oldalon a kifejezést felírhatjuk egyetlen teljes négyzetként, a jobb oldalon pedig használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó összefüggést:

$$\lg\left(\frac{a+b}{\sqrt{2026}}\right)^2 = \lg a + \lg b \Longleftrightarrow 2 \cdot \lg \frac{a+b}{\sqrt{2026}} = \lg a + \lg b \Longleftrightarrow$$ **(3 pont)**

$$\lg \frac{a+b}{\sqrt{2026}} = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$ **(3 pont)**

b) A logaritmus tulajdonságait használva a következő átalakításokat végezzük:

$$\log_w\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 - \log_{\frac{1}{w}}\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3 \geq 2\cdot\log_w\left(xyz\cdot\sqrt{xyz}\right) \Longleftrightarrow$$

$$3\log_w\left(\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{xy+yz+zx}{3}\right) \geq 2\cdot\log_w\left(xyz\cdot\sqrt{xyz}\right) \qquad \textbf{(3 pont)}$$

A jobb oldalt is egyszerűbb alakra hozva azt kapjuk, hogy:

$$3\log_w\left(\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{xy+yz+zx}{3}\right) \geq 2\cdot\frac{3}{2}\log_w(xyz) \Longleftrightarrow$$

$$3\log_w\left(\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{xy+yz+zx}{3}\right) \geq 3\log_w(xyz) \Longleftrightarrow \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{xy+yz+zx}{3} \geq xyz. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Felhasználva a számtani és mértani középértékek közötti egyenlőtlenséget, a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad \text{és} \quad \frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

A két egyenlőtlenséget összeszorozva megkapjuk a kért egyenlőtlenséget:

$$\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}\cdot\sqrt[3]{(xyz)^2} \Longleftrightarrow \frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{xy+yz+zx}{3} \geq xyz. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

■

Megjegyzés. A b) alpont a következő módon is befejezhető: az

$$\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{xy+yz+zx}{3} \geq xyz$$

egyenlőtlenség a műveletek elvégzése és átrendezés után a vele ekvivalens

$$x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 6xyz$$

egyenlőtlenségre vezetődik vissza, amelyet elosztva az $xyz > 0$ kifejezéssel, az

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) \geq 6$$

igaz egyenlőtlenséghez jutunk.

2. feladat (30 pont). Adott az $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{k=-n^3}^{n^3}\left[\sqrt[3]{k}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

függvény, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$f(n) = n - n^3.$$

b) Tanulmányozd az f függvény injektivitását és szürjektivitását!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) $f(n)=\sum_{k=-n^3}^{-1}[\sqrt[3]{k}]+[\sqrt[3]{0}]+\sum_{k=1}^{n^3}[\sqrt[3]{k}]=\sum_{k=1}^{n^3}([\sqrt[3]{-k}]+[\sqrt[3]{k}])$. **(3 pont)**

Ha $k\in\mathbb{N}^*$ köbszám, akkor $\exists\ a\in\mathbb{N}^*$, amelyre $k=a^3$.
Ekkor $[\sqrt[3]{-k}]+[\sqrt[3]{k}]=[\sqrt[3]{-a^3}]+[\sqrt[3]{a^3}]=-a+a=0$. **(3 pont)**

Ha $k\in\mathbb{N}^*$ nem köbszám, akkor $\exists\ a\in\mathbb{N}^*$ amelyre $a^3<k<(a+1)^3$.
Ekkor $a^3<k<(a+1)^3\Rightarrow a<\sqrt[3]{k}<a+1\Rightarrow[\sqrt[3]{k}]=a$. **(3 pont)**

$a^3<k<(a+1)^3\Rightarrow-(a+1)^3<-k<-a^3\Rightarrow-(a+1)<\sqrt[3]{-k}<-a\Rightarrow$
$\Rightarrow-a-1<\sqrt[3]{-k}<-a\Rightarrow[\sqrt[3]{-k}]=-a-1$.
Tehát $[\sqrt[3]{-k}]+[\sqrt[3]{k}]=-a-1+a=-1$. **(3 pont)**

1-től n^3-ig n köbszám van. A többi n^3-n szám nem köbszám.
Tehát $f(n)=0\cdot n+(-1)\cdot(n^3-n)=n-n^3,\forall\ n\in\mathbb{N}^*$ **(3 pont)**

b) Legyen $a,b\in\mathbb{N}^*$ úgy, hogy $f(a)=f(b)$.

$f(a)=f(b)\iff a-a^3=b-b^3\iff b^3-a^3-b+a=0\iff$
$\iff(b-a)(b^2+ab+a^2)-(b-a)=0\iff(b-a)(b^2+ab+a^2-1)=0$ **(3 pont)**

Mivel $b^2+ab+a^2-1\geq 1^2+1\cdot1+1^2-1=2$, $\forall\ a,b\in\mathbb{N}^*$ esetén, a második zárójel nem lehet nulla.
Tehát $f(a)=f(b)\iff b-a=0\iff a=b\Rightarrow f$ injektív. **(3 pont)**

$f(2)=2-2^3=-6$ és f szigorúan csökkenő $\Rightarrow f(n)\leq-6,\forall\ n\in\mathbb{N}^*,n\geq2$ esetén **(3 pont)**

$f(1)=0$ és $f(n)\leq-6,\forall\ n\in\mathbb{N}^*,n\geq2$ esetén $\Rightarrow$
$\Rightarrow\nexists\ n\in\mathbb{N}^*$, amelyre $f(n)=-1\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}^*\Rightarrow f$ nem szürjektív. **(3 pont)**

■

Megjegyzés. Az injektivitás a következőképpen is igazolható:

$$\begin{aligned}f(n+1)-f(n)&=n+1-(n+1)^3-(n-n^3),\\&=1+n^3-(n^3+3n^2+3n+1),\\&=-3n^2-3n.\end{aligned}$$

Mivel $-3n^2-3n<0,\forall\ n\in\mathbb{N}^*$ esetén $\Rightarrow f$ szigorúan csökkenő $\Rightarrow f$ injektív.

Megjegyzés. A b) alpont a következő módon is befejezhető: Az

$$f(n) = n - n^3 = -n(n^2 - 1) = -(n-1)\cdot n\cdot(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

összefüggésből következik, hogy minden $f(n)$ páros szám (sőt, 6-tal osztható), így f nem lehet szürjektív, hiszen a $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ halmazban vannak páratlan számok is.

3. feladat (20 pont). Az a, b és c komplex számokra fennállnak a

$$|a| = |b| = |c| = 1 \qquad \text{és} \qquad |a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 12$$

összefüggések. Igazold, hogy az a, b és c affixumú pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcspontjai!

Matlap 9/2025, L:3936

Első megoldás. Hivatalból **(2 pont)**
Legyen $p = \frac{a+b+c}{2}$. Ekkor $a+b-c = 2p-2c; b+c-a = 2p-2a; c+a-b = 2p-2b.$ **(2 pont)**
Ekkor az eredeti $|a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 12$ egyenlőség, rendre a következő ekvivalens alakba írható:

$$|2p-2c|^2 + |2p-2a|^2 + |2p-2b|^2 = 12 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$|p-c|^2 + |p-a|^2 + |p-b|^2 = 3 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$(p-c)(\overline{p}-\overline{c}) + (p-a)(\overline{p}-\overline{a}) + (p-b)(\overline{p}-\overline{b}) = 3 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$p\cdot\overline{p} - p\cdot\overline{c} - c\cdot\overline{p} + c\cdot\overline{c} + p\cdot\overline{p} - p\cdot\overline{a} - a\cdot\overline{p} + a\cdot\overline{a} + p\cdot\overline{p} - p\cdot\overline{b} - b\cdot\overline{p} + b\cdot\overline{b} = 3$$

$$3\cdot p\cdot\overline{p} - p\cdot(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) - \overline{p}\cdot(a+b+c) + a\cdot\overline{a} + b\cdot\overline{b} + c\cdot\overline{c} = 3 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$3\cdot|p|^2 - p\cdot(2\cdot\overline{p}) - \overline{p}\cdot(2p) + 3 = 3 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$|p|^2 = 0 \iff |p| = 0 \iff |a+b+c| = 0 \iff a+b+c = 0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Tekintsük a komplex sík $A(a), B(b)$ és $C(c)$ pontjait, ahol a, b, c a fenti komplex számok, melyekre fennáll az $a+b+c=0$ egyenlőség. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög, egy egyenlő oldalú háromszög. Mivel $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a \iff |b+c| = |-a| \iff |b+c| = 1 \iff |\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}| = 1 \iff |\overrightarrow{OD}| = 1$, ahol $OBDC$ paralelogramma. **(2 pont)**
Tehát $OB \equiv OD \equiv BD$, azaz az OBD háromszög minden oldalának hossza 1, az OBD egyenlő oldalú háromszög. Tehát a DOB szög mértéke $60°$. Hasonlóan igazolható, hogy az ODC háromszög egyenlő oldalú háromszög, ahonnan következik, hogy a BOC szög mértéke $120°$. Ekkor a BOA szög is és a AOC szög mértéke is $120°$. Ugyanakkor $OA = OB = OC = 1 \Rightarrow AOB_\triangle \equiv BOC_\triangle \equiv COA_\triangle \Rightarrow AB = BC = CA \Rightarrow ABC_\triangle$ egy egyenlő oldalú háromszög. **(2 pont)**

■

Megjegyzés. A megoldás a következőképpen is befejezhető: Ha $a+b+c=0 \Longrightarrow$ az a, b, c affixumú háromszög súlypontja egybeesik a köré írható körének középpontjával, tehát az a, b, c affixumú pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai.

Második megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

$$\begin{aligned} |a+b-c|^2 &= (a+b-c)\cdot(\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}) = a\overline{a} + a\overline{b} - a\overline{c} + b\overline{a} + b\overline{b} - b\overline{c} - c\overline{a} - c\overline{b} + c\overline{c} = \\ &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + a\overline{b} + \overline{a}b - (b\overline{c} + \overline{b}c) - (a\overline{c} + \overline{a}c) = \qquad \textbf{(2 pont)} \\ &= 3 + 2\cdot\mathrm{Re}(a\overline{b}) - 2\cdot\mathrm{Re}(b\overline{c}) - 2\cdot\mathrm{Re}(a\overline{c}) \end{aligned}$$

Hasonlóképpen: $|b+c-a|^2 = 3 + 2\cdot \mathrm{Re}(b\bar{c}) - 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{b}) - 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{c})$
$|c+a-b|^2 = 3 + 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{c}) - 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{b}) - 2\cdot \mathrm{Re}(b\bar{c})$
Tehát: $|a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 9 - 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{b}) - 2\cdot \mathrm{Re}(b\bar{c}) - 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{c})$
$9 - 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{b}) - 2\cdot \mathrm{Re}(b\bar{c}) - 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{c}) = 12 \Rightarrow -2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{b}) - 2\cdot \mathrm{Re}(b\bar{c}) - 2\cdot \mathrm{Re}(a\bar{c}) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(a\bar{b}) + \mathrm{Re}(b\bar{c}) + \mathrm{Re}(a\bar{c}) = -\frac{3}{2}$ **(2 pont)**
Jelölje $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ az a, b illetve c argumentumát.
$a\bar{b} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)[\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)] = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta) \Rightarrow \mathrm{Re}(a\bar{b}) = \cos(\alpha-\beta)$
Hasonlóképpen: $\mathrm{Re}(a\bar{c}) = \cos(\alpha-\gamma)$, $\mathrm{Re}(b\bar{c}) = \cos(\beta-\gamma)$ **(2 pont)**
Tehát $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\gamma) = -\frac{3}{2}$
Az általánosság elvesztése nélkül feltételezhetjük, hogy $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, mert a koszinusz páros függvény.
$\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\gamma) = -\frac{3}{2} \iff 2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ **(2 pont)**
Legyen $x = \frac{\alpha-\gamma}{2}$ és $y = \frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2}$.
$2\cos x\cos y + 2\cos^2 x - 1 = -\frac{3}{2} \iff 2\cos^2 x + 2\cos x\cos y + \frac{1}{2} = 0 \iff$
$\iff 4\cos^2 x + 4\cos x\cos y + 1 = 0 \iff 4\cos^2 x + 4\cos x\cos y + \cos^2 y + \sin^2 y = 0 \iff$
$\iff (2\cos x + \cos y)^2 + \sin^2 y = 0 \iff 2\cos x + \cos y = 0$ és $\sin y = 0$ **(2 pont)**
$\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha-\beta, \beta-\gamma \in [0, 2\pi) \Rightarrow (\alpha-\beta) - (\beta-\gamma) \in (-2\pi, 2\pi) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha+\gamma-2\beta \in (-2\pi, 2\pi) \Rightarrow y \in (-\pi, \pi)$ **(2 pont)**
$\sin y = 0, y \in (-\pi, \pi) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2\cos x + \cos 0 = 0 \Rightarrow 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ **(2 pont)**
$\alpha, \gamma \in [0, 2\pi), \alpha \geq \gamma \Rightarrow \alpha-\gamma \in [0, 2\pi) \Rightarrow x \in [0, \pi)$
$\cos x = -\frac{1}{2}, x \in [0, \pi) \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha - \gamma = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \gamma + \frac{4\pi}{3}$
$y = 0 \Rightarrow \frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2} = 0 \Rightarrow \alpha+\gamma-2\beta = 0 \Rightarrow 2\gamma + \frac{4\pi}{3} - 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = \gamma + \frac{2\pi}{3}$ **(2 pont)**
Jelölje A, B és C az a, b illetve c affixumú pontot.
$\alpha-\beta = \frac{2\pi}{3}, \beta-\gamma = \frac{2\pi}{3}, \alpha-\gamma = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \frac{2\pi}{3}$
de $OA = OB = OC = 1 \Rightarrow AOB_\triangle \equiv BOC_\triangle \equiv COA_\triangle \Rightarrow AB = BC = CA \Rightarrow ABC_\triangle$ egy egyenlő oldalú háromszög. **(2 pont)**

■

4. feladat (20 pont). Egy játékban 6 játékos vesz részt. Bármely két játékos vagy szövetségese vagy riválisa egymásnak. Bizonyítsd be, hogy biztosan kiválasztható a hat játékos közül három olyan, akik páronként vagy mind szövetségesek egymással, vagy mind riválisok egymással!

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**
Nevezzük A-nak az egyik játékost. A skatulyaelv alapján az A játékosnak vagy van legalább 3 szövetségese, vagy van legalább 3 riválisa. **(4 pont)**
Tárgyaljuk azt az esetet, amikor az A játékosnak van legalább 3 szövetségese. Nevezzünk közülük hármat B-nek, C-nek, D-nek. Ha közülük ketten, például B és C szövetségesek, akkor A, B és C páronként egymás szövetségesei. **(6 pont)**
Ha B, C és D között nincs két egymással szövetséges, akkor B, C és D páronként egymás riválisai. **(4 pont)**
Hasonlóképpen tárgyaljuk azt az esetet, amikor az A játékosnak van legalább 3 riválisa. Nevezzünk közülük hármat B-nek, C-nek és D-nek. Ha közülük ketten, például B és C riválisok, akkor A, B és C páronként egymás riválisai. Ha B, C és D között nincs két egymással rivális, akkor B, C és D páronként egymás szövetségesei. **(4 pont)**

■

Megjegyzés. A megoldás a következőképpen is megadható.
Képzeljük el a 6 játékost egy szabályos hatszög csúcsaiként. Bármely két játékos közötti kapcsolatot egy, a két játékost összekötő, szakasszal jelöljük. Ha két játékos szövetséges, a szakasz színe legyen

zöld, ha pedig riválisok, a szakasz színe legyen piros. A hatszög minden csúcsát kössük össze az összes többi csúccsal.
Válasszunk ki egy tetszőleges játékost, jelöljük őt A-val. Mivel rajta kívül még 5 játékos van, A-ból összesen 5 szakasz indul ki a többiekhez.
Mivel ezt az 5 szakaszt 2 színnel (zöld és piros) színezzük, a skatulyaelv alapján legalább 3 szakasznak ugyanolyan színűnek kell lennie. Tételezzük fel, hogy A-ból legalább 3 zöld szakasz indul ki. Ez azt jelenti, hogy A-nak van legalább 3 szövetségese, jelöljük őket B-vel, C-vel és D-vel.
Most vizsgáljuk a B, C és D egymás közötti kapcsolatát. Két eset lehetséges:

- Ha B, C és D közül bármelyik kettő szövetséges (például B és C között zöld szakasz van), akkor A, B és C mindhárman szövetségesei egymásnak. Ekkor az 1. kijelentés igaz.
- Ha B, C és D közül senki sem szövetségese a másiknak (vagyis B, C és D között minden szakasz piros), akkor ők hárman mindannyian riválisai egymásnak. Ekkor az 2. kijelentés igaz.

Mivel a két szín felcserélhető hasonlóképpen tárgyaljuk ha A-ból legalább három piros szakasz indul ki.
Mivel minden esetben találtunk legalább 3 olyan embert, akik vagy mind szövetségesek, vagy mind riválisok, az eredeti állítás igaz.

Hivatalból összesen: 10 pont.

Pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.