VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV
megyei szakasz, 2026. február 7.

XI. osztály

1. feladat (30 pont). Adott az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = U$ mátrixegyenlet, ahol $X, U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Igazold, hogy az $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix esetén nincs megoldása az egyenletnek!

b) Add meg az összes olyan $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre az egyenletnek végtelen sok megoldása van!

Miklós Dóra, Lövéte

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Legyen $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, amelyre az egyenlet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = U \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
(3 pont)

Innen kapjuk az

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2t=2 \\ 2x+4z=3 \\ 2y+4t=5 \end{cases}$$

egyenletrendszert, melynek nincs megoldása. Tehát a megadott U esetén valóban nincs megoldása az egyenletnek. **(6 pont)**

b) Az a) alpont alapján, ha $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, akkor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{pmatrix},$$

vagyis az $U = \begin{pmatrix} m & n \\ 2m & 2n \end{pmatrix}$, $m, n \in \mathbb{R}$ alakú mátrixok esetén lesz megoldása az egyenletnek. **(6 pont)**

Vizsgáljuk, hogy ezek közül melyik esetben lesz végtelen sok megoldás. Rögzített $m, n \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} m & n \\ 2m & 2n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ 2m & 2n \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldásait a következőképpen határozzuk meg:

$$\begin{cases} x + 2z = m \\ y + 2t = n \end{cases} \implies \begin{cases} x = m - 2\alpha \\ y = n - 2\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases},$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterek. **(9 pont)**

Minden rögzített $m, n \in \mathbb{R}$ esetén az $X = \begin{pmatrix} m - 2\alpha & n - 2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ mátrix megoldása az egyenletnek, bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén, vagyis az $U = \begin{pmatrix} m & n \\ 2m & 2n \end{pmatrix}$, $m, n \in \mathbb{R}$ alakú mátrixok esetén van végtelen sok megoldása az egyenletnek. **(3 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \det(X) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \iff 0 \cdot \det(X) = -1 \iff 0 = -1,$$

ami nem lehet. Tehát az megadott egyenletnek $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ esetén nincs megoldása. **(9 pont)**

■

2. feladat (30 pont). Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot az

$$a_1 = \sqrt{5} \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3[a_n] + 6}{5}, \quad \forall n \geq 1,$$

rekurzióval értelmezzük, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Számítsd ki a sorozat általános tagjának $[a_n]$ egész részét!

b) Igazold, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ határérték és határozd meg az értékét!

c) Igazold, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^2}$ határérték és számítsd ki az értékét!

Mastan Eliza, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Kiszámítjuk a sorozat első néhány tagjának egész részét. Ha $n = 1$, akkor $[a_1] = [\sqrt{5}] = 2$. Ha $n = 2$, akkor a rekurzió alapján

$$a_2 = \frac{2a_1 + 3 \cdot 2 + 6}{5} = \frac{2a_1 + 12}{5} = \frac{2\sqrt{5} + 12}{5}.$$

Mivel $2 < \sqrt{5} < 3$, ezért $3 < \frac{16}{5} < a_2 = \frac{2\sqrt{5}+12}{5} < \frac{18}{5} < 4$, ahonnan $[a_2] = 3$. Sejtésünk a következő:

$$[a_n] = n + 1, \quad \forall\, n \geq 1.$$ **(6 pont)**

Ezt matematikai indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor teljesül az összefüggés, mert $[a_1] = 2$. A továbbiakban feltételezzük, hogy $[a_k] = k + 1$ és igazoljuk, hogy $[a_{k+1}] = k + 2$. Mivel $a_k \geq [a_k]$, felírhatjuk, hogy

$$a_{k+1} = \frac{2a_k + 3[a_k] + 6}{5} \geq \frac{5[a_k] + 6}{5} = k + 1 + \frac{6}{5} > k + 2.$$ **(3 pont)**

Másrészt pedig $a_k < [a_k] + 1$, így

$$a_{k+1} = \frac{2a_k + 3[a_k] + 6}{5} < \frac{2([a_k] + 1) + 3[a_k] + 6}{5} = \frac{5[a_k] + 8}{5} = k + 1 + \frac{8}{5} < k + 3.$$

Mivel $k + 2 < a_{k+1} < k + 3$, következik, hogy $[a_{k+1}] = k + 2$. Tehát $[a_n] = n + 1$, bármely $n \geq 1$ esetén. **(3 pont)**

b) Ismert, hogy $a_n \geq [a_n]$ és az a) alpontban igazoltak alapján $[a_n] = n+1$, ezért $a_n \geq n+1$, bármely $n \geq 1$ esetén. **(3 pont)**
Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} (n + 1) = +\infty$, **(3 pont)**
ezért az (a_n) sorozat divergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. **(3 pont)**

c) Mivel $[a_k] \leq a_k < [a_k] + 1$ és az a) alpont alapján $[a_k] = k + 1$, ezért $k + 1 \leq a_k < k + 2$, bármely $k \geq 1$ esetén. Összegezve a megfelelő oldalakat 1-től n-ig kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}(k + 1) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n}(k + 2),$$
$$\frac{n(n + 1)}{2} + n \leq \sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{n(n + 1)}{2} + 2n,$$
$$\frac{n^2 + 3n}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{n^2 + 5n}{2}.$$

Tehát

$$\frac{n^2 + 3n}{2n^2} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^2} < \frac{n^2 + 5n}{2n^2}.$$ **(3 pont)**

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5n}{2n^2} = \frac{1}{2}$, a fogó tétel alapján létezik a kért határérték és az értéke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$ **(3 pont)**

■

3. feladat (20 pont). Adott egy $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$x_n > 1 \quad \text{és} \quad x_{n+1}^3 < 3x_n - 2, \quad \forall n \geq 1.$$

Igazold, hogy a sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

Matlap 8/2025, L:3924

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**
Vizsgáljuk a sorozat monotonitását, melyhez tanulmányozzuk az $x_{n+1}^3 - x_n^3$ különbséget. A megadott egyenlőtlenség felhasználásával

$$x_{n+1}^3 - x_n^3 < 3x_n - 2 - x_n^3. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalát szorzótényezőre bontva

$$3x_n - 2 - x_n^3 = -(x_n - 1)^2(x_n + 2). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $x_n > 1$, ezért $-(x_n - 1)^2(x_n + 2) < 0$, bármely $n \geq 1$ esetén, ahonnan $x_{n+1}^3 < x_n^3$, bármely $n \geq 1$ esetén. **(2 pont)**
Köbgyököt vonva az egyenlőtlenség mindkét oldalából, következik, hogy $x_{n+1} < x_n$, bármely $n \geq 1$ esetén, tehát az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan csökkenő. **(2 pont)**
Tudva, hogy $x_n > 1$, bármely $n \geq 1$ esetén, a sorozat alulról korlátos, **(2 pont)**
így a Weierstrass-tétel alapján az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens. **(2 pont)**
Legyen $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ a sorozat véges határértéke. A megadott egyenlőtlenségben határértékre térve következik, hogy $l^3 \leq 3l - 2$. **(2 pont)**
Ez egyenértékű az $(l-1)^2(l+2) \leq 0$ egyenlőtlenséggel, ahonnan $l \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$. **(2 pont)**
Mivel $x_n > 1$, minden $n \geq 1$ esetén, ezért $l \geq 1$. Innen következik, hogy $l = 1$ az egyedüli megoldása az egyenlőtlenségnek. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. **(2 pont)**

■

4. feladat (20 pont). Egy $n \times n$-es négyzetrácsos táblán véletlenszerűen kijelölünk két különböző mezőt (vagyis 1×1-es négyzetet). Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kijelölt mezők középpontjait összekötő szakasz felezőpontja is egy mező középpontja legyen!

Hasas Tünde, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**
A szakasz felezőpontja akkor lesz egy mező középpontja, ha a két kijelölt mező sorindexei azonos paritásúak, illetve oszlopindexei is azonos paritásúak. **(4 pont)**
Külön tárgyaljuk, ha n páros vagy páratlan.

1. eset. Ha $n = 2k$, akkor az összesen $(2k)^2 = 4k^2$ mezőből két különböző mezőt $C_{4k^2}^2 = \frac{4k^2(4k^2-1)}{2}$-féleképpen választhatunk ki, amely a lehetséges esetek száma. **(2 pont)**
Továbbá négyféle sorindex-oszlopindex paritáspár van: páros-páros, páros-páratlan, páratlan-páros, páratlan-páratlan. Ekkor k darab páros, illetve k darab páratlan indexű sor van. Hasonlóan k darab páros, illetve k darab páratlan indexű oszlop van. Mind a négy paritáspárú mezőből k^2 van. Két azonos paritáspárú mezőt $C_{k^2}^2 = \frac{k^2(k^2-1)}{2}$-féleképpen tudunk kiválasztani. Így a kedvező esetek száma $4 \cdot \frac{k^2(k^2-1)}{2}$. Tehát páros $n = 2k$ esetén a valószínűség

$$P = \frac{4C_{k^2}^2}{C_{4k^2}^2} = \frac{4k^2(k^2-1)}{4k^2(4k^2-1)} = \frac{k^2-1}{4k^2-1} = \frac{n^2-4}{4(n^2-1)}. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

2. eset. Ha $n = 2k + 1$, akkor a lehetséges esetek száma

$$C^2_{(2k+1)^2} = \frac{(2k+1)^2[(2k+1)^2-1]}{2} = \frac{(2k+1)^2(2k+2)\cdot 2k}{2} = 2k(k+1)(2k+1)^2. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel k páros és $k+1$ páratlan sor, illetve oszlop van, vizsgáljuk a lehetséges paritáspárok számát:

- k^2 mezőnek van páros sor- és oszlopindexe. Ezekből két különböző mezőt $C^2_{k^2} = \frac{k^2(k^2-1)}{2}$ módon választhatunk ki.
- $k(k+1)$ mezőnek van páros sor- és páratlan oszlopindexe. Ezekből két különböző mezőt $C^2_{k(k+1)} = \frac{(k^2+k)(k^2+k-1)}{2}$ módon választhatunk ki.
- Szintén $k(k+1)$ mezőnek van páratlan sor- és páros oszlopindexe. Ezekből két különböző mezőt $C^2_{k(k+1)} = \frac{(k^2+k)(k^2+k-1)}{2}$ módon választhatunk ki.
- Végül $(k+1)^2$ mezőnek lesz páratlan a sor- és oszlopindexe. Ezekből két különböző mezőt $C^2_{(k+1)^2} = \frac{(k^2+2k+1)(k^2+2k)}{2}$ módon választhatunk ki. **(4 pont)**

Összeadva, megkapjuk a kedvező esetek számát:

$$\begin{aligned} C^2_{k^2} + 2C^2_{k(k+1)} + C^2_{(k+1)^2} &= \frac{k^2(k^2-1)}{2} + \frac{2\cdot(k^2+k)(k^2+k-1)}{2} + \frac{(k^2+2k+1)(k^2+2k)}{2} \\ &= \frac{4k^4+8k^3+4k^2}{2} = 2k^2(k+1)^2. \end{aligned}$$

Így páratlan $n = 2k+1$ esetén a valószínűség

$$P = \frac{2k^2(k+1)^2}{2k(k+1)(2k+1)^2} = \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2} = \frac{n^2-1}{4n^2}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Megjegyzés. Ha az eredményt csak a k, vagy csak az n függvényében adja meg, akkor is teljes értékű a megoldás.

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

Pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.