VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. EMMV
megyei szakasz, 2026. február 7.

XII. osztály

1. feladat (30 pont). Ha x és y olyan tetszőleges valós számok, amelyekre $xy \neq -1$, legyen $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, valamint tekintsük a $G = (-1, 1)$ halmazt.

a) Igazold, hogy „$*$” művelet a G-n és $(G, *)$ kommutatív csoport!

b) Számítsd ki az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértékét, ahol $x \in G$ adott csoportelem és $x_n = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n\text{-szer}}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Matlap 10/2025, L:3958

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) A $(G, *)$ Abel-féle (kommutatív) csoport, ha teljesül a következő öt feltétel:
1) Zártság. Igazoljuk, hogy bármely $x, y \in (-1, 1)$ esetén, $x * y \in (-1, 1)$.

$$\begin{aligned}1 - (x * y)^2 = 1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 &= \frac{(1+xy)^2 - (x+y)^2}{(1+xy)^2}\\ &= \frac{1 + 2xy + x^2y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{(1+xy)^2} = \frac{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2}{(1+xy)^2}\\ &= \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2}.\end{aligned}$$

Mivel $x, y \in (-1, 1)$, ezért $1 - x^2 > 0$ és $1 - y^2 > 0$, továbbá $(1 + xy)^2 > 0$, tehát $1 - (x * y)^2 > 0$, azaz $(x * y)^2 < 1$ innen következik, hogy $x * y \in (-1, 1)$. Tehát a G halmaz zárt a "$*$" műveletre nézve. **(3 pont)**

2) Asszociativitás. A "$*$" művelet asszociatív a G halmazon, ha $(x * y) * z = x * (y * z)$, bármely $x, y, z \in G$ esetén. Ekkor

$$(x * y) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz},$$

$$x * (y * z) = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}.$$

A két kifejezés megegyezik, mivel a valós számok összeadása és szorzása kommutatív műveletek, tehát $(x * y) * z = x * (y * z)$, bármely $x, y, z \in G$ esetén, vagyis a művelet asszociatív. **(3 pont)**

3) Kommutativitás. A "$*$" művelet kommutatív a G halmazon, ha $x * y = y * x$, bármely $x, y \in G$. Mivel

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y * x, \forall x, y \in G,$$

ezért a művelet kommutatív. **(3 pont)**

Megjegyzés. Ha valaki előbb a kommutativítást igazolva, majd az $(x*y)*z$ kifejezés szimmetriájára és a kommutativitásra hivatkozva következtet a művelet asszociativitására, akkor is maximális pont jár!

4) Semleges elem. A " $*$ " műveletre nézve létezik semleges elem, ha létezik $e \in G$, melyre $e * x = x * e = x$, bármely $x \in G$ esetén. Mivel a " $*$ " művelet kommutatív, ezért

$$x * e = x \iff \frac{x+e}{1+xe} = x \iff x + e = x + x^2 e \iff e(1-x^2) = 0.$$

Mivel $x \in (-1,1)$, ezért $1 - x^2 \neq 0$, így szükségképpen $e = 0$, a művelet semleges eleme. (**3 pont**)
5) Szimmetrikus elem. Bizonyítjuk, hogy a G halmaz minden eleme szimmetrizálható, vagyis bármely $x \in G$ esetén létezik olyan $x^{-1} \in G$, melyre $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Mivel a " $*$ " művelet kommutatív és a semleges eleme a 0 ezért

$$\begin{aligned} x * x^{-1} = 0 \iff & \frac{x + x^{-1}}{1 + xx^{-1}} = 0 \iff x + x^{-1} = 0 \\ \iff & x^{-1} = -x \in (-1,1), \quad \text{ha} \quad x \in (-1,1). \end{aligned}$$

Tehát minden $x \in (-1,1)$ elem szimmetrizálható és $x^{-1} = -x$. Mivel a fenti öt feltétel teljesül következik, hogy $(G, *)$ kommutatív csoport. (**3 pont**)

Megjegyzés. A feladat a) alpontja így is megoldható:
A $\psi : (0,\infty) \to (-1,1)$, $\psi(t) = \frac{t-1}{t+1}$ függvény bijektív (ezt igazolni kell).
Emiatt bármely $x, y \in G$ esetén létezik $t_1, t_2 \in (0,\infty)$ úgy, hogy $x = \psi(t_1)$ és $y = \psi(t_2)$. Továbbá ellenőrizhető, hogy

$$x * y = \psi(t_1) * \psi(t_2) = \psi(t_1 \cdot t_2), \forall x, y \in G,$$

tehát a ψ függvény átviszi a csoportstruktúrát a $(0,\infty)$ halmazról a G-re, vagyis $(G, *)$ is kommutatív csoport.

b) Tekintjük a

$$\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \frac{1+t}{1-t}$$

leképezést. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{1 + (x*y)}{1 - (x*y)} &= \frac{1 + \frac{x+y}{1+xy}}{1 - \frac{x+y}{1+xy}} = \frac{\frac{1+xy+x+y}{1+xy}}{\frac{1+xy-x-y}{1+xy}} = \frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} \\ &= \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y}. \end{aligned}$$

Vagyis

$$\varphi(x * y) = \varphi(x)\,\varphi(y).$$

Legyen $a = \varphi(x) = \dfrac{1+x}{1-x} > 0$. Mivel $x_n = \underbrace{x * \cdots * x}_{n\text{-szer}}$, ezért a matematikai indukció alapján következik, hogy

$$\varphi(x_n) = \varphi^n(x) = a^n.$$

Innen x_n kifejezhető:

$$\frac{1+x_n}{1-x_n}=a^n \iff 1+x_n=a^n(1-x_n) \iff x_n(1+a^n)=a^n-1,$$

tehát

$$x_n=\frac{a^n-1}{a^n+1}, \qquad \text{ahol} \qquad a=\frac{1+x}{1-x}. \tag{6 pont}$$

Vizsgáljuk az x_n sorozat határértékét:
Ha $x\in(-1,0)$, akkor $0<a<1$, így $a^n\to 0$, tehát

$$x_n=\frac{a^n-1}{a^n+1}\longrightarrow\frac{-1}{1}=-1.$$

Ha $x=0$, akkor $a=1$, így minden n-re

$$x_n=\frac{1^n-1}{1^n+1}=0.$$

Ha $x\in(0,1)$, akkor $a>1$, így $a^n\to+\infty$, tehát

$$x_n=\frac{a^n-1}{a^n+1}\longrightarrow 1.$$

Tehát:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}-1, & \text{ha } x\in(-1,0),\\ 0, & \text{ha } x=0,\\ 1, & \text{ha } x\in(0,1).\end{cases} \tag{6 pont}$$

Megjegyzés. Az első feladat b) alpontja így is megoldható:

$$x*x=\frac{x+x}{1+x\cdot x}=\frac{2x}{1+x^2}=\frac{C_2^1x}{C_2^0+C_2^2x^2}.$$

$$x*x*x=\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)*x=\frac{\frac{2x}{1+x^2}+x}{1+\frac{2x}{1+x^2}\cdot x}=\frac{2x+x+x^3}{1+x^2+2x^2}=\frac{3x+x^3}{1+3x^2}=\frac{C_3^1x+C_3^3x^3}{C_3^0+C_3^2x^2}.$$

$$x*x*x*x=\frac{\frac{3x+x^3}{1+3x^2}+x}{1+\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\cdot x}=\frac{3x+x^3+x+3x^3}{1+3x^2+3x^2+x^4}=\frac{4x+4x^3}{1+6x^2+x^4}=\frac{C_4^1x+C_4^3x^3}{C_4^0+C_4^2x^2+C_4^4x^4}.$$

Indukciós feltétel:

$$\underbrace{x*x*\cdots*x}_{n}=\frac{\sum_{k\geq 0}C_n^{2k+1}\,x^{2k+1}}{\sum_{k\geq 0}C_n^{2k}\,x^{2k}}.$$

Következtetés:

$$\underbrace{x*x*\cdots*x}_{n+1}=\frac{\sum_{k\geq 0}C_{n+1}^{2k+1}\,x^{2k+1}}{\sum_{k\geq 0}C_{n+1}^{2k}\,x^{2k}}.$$

$$\underbrace{x*x*\cdots*x}_{n+1}=\left(\underbrace{x*x*\cdots*x}_{n}\right)*x=\frac{\frac{\sum_{k\geq 0}C_n^{2k+1}x^{2k+1}}{\sum_{k\geq 0}C_n^{2k}x^{2k}}+x}{1+\frac{\sum_{k\geq 0}C_n^{2k+1}x^{2k+1}}{\sum_{k\geq 0}C_n^{2k}x^{2k}}\cdot x}$$

$$= \frac{\sum_{k\geq 0} C_n^{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k\geq 0} C_n^{2k} x^{2k+1}}{\sum_{k\geq 0} C_n^{2k} x^{2k} + \sum_{k\geq 0} C_n^{2k+1} x^{2k+2}}$$

$$= \frac{\sum_{k\geq 0} \left(C_n^{2k+1} + C_n^{2k}\right) x^{2k+1}}{C_n^0 + \sum_{k\geq 1} \left(C_n^{2k} + C_n^{2k-1}\right) x^{2k}}$$

$$= \frac{\sum_{k\geq 0} C_{n+1}^{2k+1}\, x^{2k+1}}{C_{n+1}^0 + \sum_{k\geq 0} C_{n+1}^{2k}\, x^{2k}} = \frac{\sum_{k\geq 0} C_{n+1}^{2k+1}\, x^{2k+1}}{\sum_{k\geq 0} C_{n+1}^{2k}\, x^{2k}}$$

$$= \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}.$$

Ha $x \in (-1, 0) \Rightarrow 1 + x \in (0, 1)$ és $1 - x \in (1, 2)$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-x)^n \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n - 1\right]}{(1-x)^n \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n + 1\right]} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Ha $x = 0 \Rightarrow \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n} = 0$.
Ha $x \in (0, 1) \Rightarrow 1 + x \in (1, 2)$ és $1 - x \in (0, 1)$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x)^n \left[1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right]}{(1+x)^n \left[1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right]} = 1.$$

$$\text{Tehát} \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n} = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \in (-1, 0), \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x \in (0, 1). \end{cases}$$

■

2. feladat (30 pont). Számítsd ki a következő határozatlan integrálokat:

a)

$$\int \frac{1}{x\left(x^{2025} + 2026\right)}\, dx, \quad x > 0.$$

b)

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{b \sin x + a \cos x}\, dx, \quad a, b > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Bővítjük a törtet x^{2024}-gyel:

$$\int \frac{1}{x(x^{2025} + 2026)}\, dx = \int \frac{x^{2024}}{x^{2025}(x^{2025} + 2026)}\, dx.$$

Legyen

$$t = x^{2025} \quad \Longrightarrow \quad dt = 2025x^{2024}\,dx \quad \Longrightarrow \quad x^{2024}\,dx = \frac{dt}{2025}. \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

Ekkor

$$\int \frac{x^{2024}}{x^{2025}(x^{2025}+2026)}\,dx = \int \frac{1}{t(t+2026)}\cdot\frac{dt}{2025} = \frac{1}{2025}\int \frac{1}{t(t+2026)}\,dt = \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

$$= \frac{1}{2025}\int \frac{1}{t(t+2026)}\,dt = \frac{1}{2025\cdot 2026}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2026}\right)dt \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

$$= \frac{1}{2025\cdot 2026}\left(\ln|t| - \ln|t+2026|\right) + C. \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

Visszahelyettesítve $t = x^{2025}$ kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x(x^{2025}+2026)}\,dx = \frac{1}{2025\cdot 2026}\ln\left(\frac{x^{2025}}{x^{2025}+2026}\right) + C. \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

b) Legyen $\varphi(x) = b\sin x + a\cos x$, ekkor $\varphi'(x) = b\cos x - a\sin x$. Keresünk $A, B \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy

$$a\sin x + b\cos x = A\cdot\varphi(x) + B\cdot\varphi'(x),\ \forall x > 0.$$

Azaz

$$A\cdot(b\sin x + a\cos x) + B\cdot(b\cos x - a\sin x) = (Ab - Ba)\cdot\sin x + (Aa + Bb)\cdot\cos x,\ \forall x > 0.$$

Ez akkor egyezik $a\sin x + b\cos x$-szel, ha

$$\begin{cases} Ab - Ba = a, \\ Aa + Bb = b. \end{cases}$$

Megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy:

$$A = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \qquad B = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}. \qquad (\mathbf{6\ pont})$$

Így

$$\frac{a\sin x + b\cos x}{b\sin x + a\cos x} = \frac{A\cdot\varphi(x) + B\cdot\varphi'(x)}{\varphi(x)} = A + B\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Tehát

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{b\sin x + a\cos x}\,dx = \int\left(A + B\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)dx = A\cdot x + B\cdot\ln|\varphi(x)| + C.$$

Mivel $a, b > 0$ és $x \in (0, \pi/2)$ esetén $\sin x, \cos x > 0$, ezért $\varphi(x) > 0$, így elhagyható az abszolútérték, azaz

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{b\sin x + a\cos x}\,dx =$$

$$= \frac{2ab}{a^2+b^2}\,x + \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\ln\big(b\sin x + a\cos x\big) + C. \qquad (\mathbf{6\ pont})$$

■

3. feladat (20 pont). Számítsd ki az $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény minimumát, ha

$$F(x) = \max\left\{x^2 + \frac{2026}{x},\ 2027x\right\}, \quad \forall x > 0.$$

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

Ha $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2026}{x}$, $g(x) = 2027x$, $\forall x > 0$, akkor

$$F(x) = \max\big(f(x), g(x)\big).$$

Megoldjuk az $f(x) = g(x)$ egyenletet:

$$x^2 + \frac{2026}{x} = 2027x.$$

Ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$x^3 - 2027x^2 + 2026 = 0,$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$(x-1)(x^2 - 2026x - 2026) = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldásai:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1013 + \sqrt{1013 \cdot 1015}.$$ **(4 pont)**

Mivel az f és g függvények folytonosak a $(0, \infty)$ értelmezési tartományon, elégséges a $(0, x_1)$, $[x_1, x_2)$ és $[x_2, \infty)$ intervallumok egy-egy belső pontjában ellenőrizni, hogy melyik függvény nagyobb.

Ha $x \in (0, 1)$, például $x = \frac{1}{2}$ esetén

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2026}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + 4052, \qquad g\left(\frac{1}{2}\right) = 2027 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2027}{2},$$

tehát $f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$, vagyis $f(x) > g(x)$ minden $x \in (0, 1)$ esetén.

Ezért itt $F(x) = f(x)$. **(2 pont)**

Ha $x \in [1, x_2)$, például $x = 2$ esetén

$$f(2) = 4 + \frac{2026}{2} = 1017, \qquad g(2) = 2027 \cdot 2 = 4054,$$

tehát $g(2) > f(2)$, vagyis $g(x) > f(x)$ minden $x \in [1, x_2)$ esetén.

Ezért itt $F(x) = g(x)$. **(2 pont)**

Ha $x \geq x_2$, akkor például $x = 2027$-re

$$f(2027) = 2027^2 + \frac{2026}{2027}, \qquad g(2027) = 2027 \cdot 2027 = 2027^2,$$

tehát $f(2027) > g(2027)$, vagyis $f(x) > g(x)$ minden $x \in [x_2, \infty)$ esetén.

Ezért itt $F(x) = f(x)$. Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, 1), \\ g(x), & x \in [1, x_2), \\ f(x), & x \in [x_2, \infty). \end{cases}$$ **(2 pont)**

Az $[1, x_2)$ intervallumban $F(x) = g(x) = 2027x$, ami szigorúan növekvő, ezért

$$\min_{x\in[1,x_2]} F(x) = g(1) = 2027. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A $(0, 1)$ és $[x_2, \infty)$ intervallumban $F(x) = f(x)$, deriválva az f függvényt kapjuk, hogy:

$$f'(x) = 2x - \frac{2026}{x^2} = \frac{2x^3 - 2026}{x^2}.$$

Ha $x \in (0, 1)$, akkor $2x^3 < 2 < 2026$, tehát $2x^3 - 2026 < 0$, így $f'(x) < 0$, vagyis f csökkenő a $(0, 1)$ intervallumon. Következésképpen $f(x) > f(1) = 2027$ minden $x \in (0, 1)$ esetén, tehát ezen a részen $F(x) > 2027$. **(2 pont)**

Ha $x \in [x_2, \infty)$, akkor $2x^3 > 2 \cdot 2026^3 > 2026$, így itt f növekvő. Következésképpen

$$\min_{x\in[x_2,\infty)} F(x) = f(x_2) = x_2^2 + \frac{2026}{x_2} > x_2^2 > 2026^2 > 2027. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $x = 1$ esetén

$$f(1) = 1 + \frac{2026}{1} = 2027, \qquad g(1) = 2027 \cdot 1 = 2027,$$

ezért F(1)=2027.

Tehát a keresett minimumérték 2027, és ezt az F függvény $x = 1$-nél éri el. **(2 pont)**

Megjegyzés. A gondolatmenet rövidebben is leírható. Észrevehető, hogy $x = 1$-ben $f(1) = g(1) = 2027$. Mivel a feladat csak F minimumát kéri, ezért elég belátni, hogy minden más helyen legalább az egyik függvény legalább 2027-et vesz fel (így a maximumfüggvény konkrét meghatározása nem is szükséges). Az világos, hogy ha $x > 1$, akkor $2027x > 2027$. Még azt kell meggondolni, hogy ha $0 < x < 1$, akkor

$$f = x^2 + \frac{2026}{x} > 2027 \iff x^3 - 2027x + 2026 = (1 - x)\big(2026 - x^2 - x\big) > 0,$$

ami nyilvánvalóan teljesül, ha $0 < x < 1$, mert így mindkét tényező pozitív. Tehát F az $x = 1$ pontban 2027-et vesz fel, és azt kaptuk, hogy minden más helyen nagyobbat, tehát tényleg ez a minimum.

■

4. feladat (20 pont). Egy $n \times n$-es táblázat mezőibe beírjuk az $1, 2, \ldots, n^2$ számokat sorfolytonosan (balról jobbra, fentről lefelé).

1	2	3	$\cdots$		n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\cdots$		$2n$
			$\vdots$	$\cdots$	
			$\cdots$		n^2

Legyen $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (rögzített). Egy k-blokk alatt a táblázat egy olyan részét értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a táblázaton belül a rácsvonalak mentén kijelölünk egy k egymásutáni sorból és k egymásutáni oszlopból álló, összefüggő, négyzet alakú tartományt.

a) Hány k-blokk van?

b) Határozd meg az összes lehetséges k-blokkösszeg legnagyobb közös osztóját, ha blokkösszeg alatt a blokkban lévő számok összegét értjük!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) Egy k-blokk bal felső sarkát úgy választhatjuk meg, hogy a blokk még beleférjen a táblába. A bal felső sarok sorindexe lehet $1, 2, \ldots, n-k+1$, tehát $n-k+1$ lehetőség, és ugyanígy az oszlopindexre is $n-k+1$ lehetőség van. Ezért a blokkok száma:

$$(n-k+1)^2.$$ **(4 pont)**

b) Jelölje $S_{i,j}$ annak a k-blokknak az összegét, amelynek bal felső sarka az i-edik sor j-edik oszlopában van $(1 \le i, j \le n-k+1)$.
Tegyük fel, hogy $k < n$, különben csak egyetlen blokk lenne. Ha egy blokkot egy mezővel jobbra tolunk, akkor minden sorban a blokk jobb szélén egy szám belép, bal szélén egy szám kilép, a különbség minden sorban k, és k sor van, tehát

$$S_{i,j+1} - S_{i,j} = k^2.$$ **(2 pont)**

Ha egy blokkot egy mezővel lefele tolunk, akkor minden oszlopban a blokk alsó szélén egy szám belép, felső szélén egy szám kilép, a különbség minden oszlopban kn, és k oszlop van, tehát

$$S_{i+1,j} - S_{i,j} = nk^2.$$ **(2 pont)**

Következésképp minden $S_{i,j}$ ugyanazt a maradékot adja modulo k^2, vagyis

$$S_{i,j} \equiv S_{1,1} \pmod{k^2},$$

ez azt jelenti, hogy az összes blokkösszeg legnagyobb közös osztója

$$\text{lnko}(S_{i,j}) = \text{lnko}\big(k^2,\ S_{1,1}\big).$$ **(2 pont)**

A bal felső k-blokk elemei:

$$\begin{aligned}
&1, 1+1, 1+2, \ldots, 1+k-1\\
&1+n, 1+n+1, 1+n+2, \ldots, 1+n+k-1\\
&1+2n, 1+2n+1, 1+2n+2, \ldots, 1+2n+k-1\\
&\ldots\\
&1+(k-1)n, 1+(k-1)n+1, 1+(k-1)n+2, \ldots, 1+(k-1)n+k-1
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
S_{1,1} &= k \cdot (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k \text{ darab}}) + k \cdot (1+2+3+\ldots+k-1) + k \cdot (n+2n+\ldots+(k-1)n)\\
&= k^2 + k \cdot \frac{(k-1)k}{2} \cdot (n+1) =\\
&= k^2 \left(1 + \frac{(k-1)(n+1)}{2}\right).
\end{aligned}$$ **(2 pont)**

Legyen $t = (k-1)(n+1)$.
Ha t páros, akkor $\frac{t}{2}$ egész, így $S_{1,1}$ osztható k^2-tel, tehát $\text{lnko}(k^2, S_{1,1}) = k^2$.
Ha t páratlan, akkor $S_{1,1} = k^2\left(1+\frac{t}{2}\right)$ nem osztható k^2-tel, viszont osztható $\frac{k^2}{2}$-vel, és ekkor a legnagyobb közös osztó, tehát $\text{lnko}(k^2, S_{1,1}) = \frac{k^2}{2}$.
Mivel t pontosan akkor páratlan, ha k páros *és* n páros, ezért ha $k < n$, akkor

$$\text{lnko}\big(S_{i,j} \mid 1 \le i,j \le n-k+1\big) = \begin{cases} k^2, & \text{ha } k \text{ páratlan vagy } n \text{ páratlan,} \\ \dfrac{k^2}{2}, & \text{ha } k \text{ páros és } n \text{ páros.} \end{cases} \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Ha $k = n$, akkor csak egyetlen blokk van, így az lnko maga az összeg:

$$\text{lnko}\big(S_{i,j} \mid 1 \le i,j \le n-k+1\big) = 1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Megjegyzés. Ha valaki a bizonyítást csak egy sajátos esetben végzi el például $k = 2$ blokkok esetén, akkor erre 6 pont adható, de ez nem adható össze a javítókulcsnak az erre a feladatra vonatkozó többi pontjával!

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

Pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.